Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 4 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *Вася загадал натуральное число больше 99, но меньше 1000. Сумма первой и последней цифр этого числа равна 1, а произведение первой и второй цифр равно 4. Какое число загадал Вася?*

Ответ: 140

Решение. Заметим, что сумму 1 можно получить только сложением цифр 1 и 0, причем первая цифра числа не может быть 0, поэтому она равна 1, откуда последняя - 0. Так как произведение первой и второй цифры равно 4, получаем, что вторая цифра - 4, и в ответе - число 140.

1.2. *Вася загадал натуральное число больше 99, но меньше 1000. Сумма первой и последней цифр этого числа равна 1, а произведение первой и второй цифр равно 7. Какое число загадал Вася?*

Ответ: 170

1.3. *Вася загадал натуральное число больше 99, но меньше 1000. Сумма первой и второй цифр этого числа равна 1, а произведение первой и последней цифр равно 5. Какое число загадал Вася?*

Ответ: 105

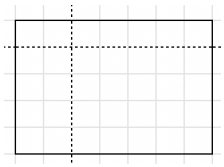
1.4. *Вася загадал натуральное число больше 99, но меньше 1000. Сумма первой и последней цифр этого числа равна 1, а произведение первой и второй цифр равно 9. Какое число загадал Вася?*

Ответ: 190

1.5. *Вася загадал натуральное число больше 99, но меньше 1000. Сумма первой и второй цифр этого числа равна 1, а произведение первой и последней цифр равно 6. Какое число загадал Вася?*

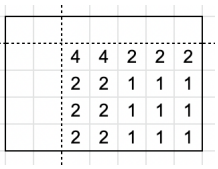
Ответ: 106

2.1. *На листе бумаги нарисован прямоугольник* 5×7*, и пунктиром нарисованы линии сгиба. Сколько клеток будет накрыто ровно два раза?*

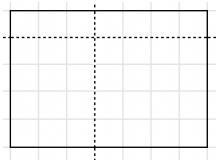


Ответ: 9

Решение. Легко видеть, что после сгибания клетки будут покрыты ровно столько раз, какая цифра стоит на рисунке в правой нижней части.

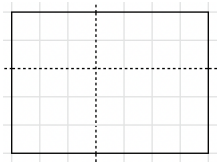


2.2. *На листе бумаги нарисован прямоугольник* 5×7*, и пунктиром нарисованы линии сгиба. Сколько клеток будет накрыто ровно два раза?*



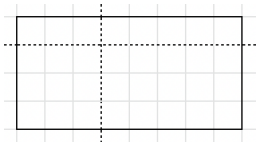
Ответ: 10

2.3. *На листе бумаги нарисован прямоугольник* 5×7*, и пунктиром нарисованы линии сгиба. Сколько клеток будет накрыто ровно два раза?*



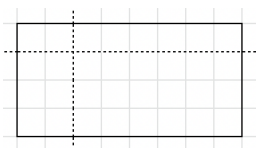
Ответ: 5

2.4. *На листе бумаги нарисован прямоугольник* 4×8*, и пунктиром нарисованы линии сгиба. Сколько клеток будет накрыто ровно два раза?*



Ответ: 8

2.5. *На листе бумаги нарисован прямоугольник* 4×8*, и пунктиром нарисованы линии сгиба. Сколько клеток будет накрыто ровно два раза?*



Ответ: 8

3.1. *На столе лежат банан, груша, дыня, помидор и яблоко. Известно, что дыня весит больше, чем оставшиеся 4 предмета. Банан и помидор весят столько же, сколько груша и яблоко, а еще банан весит больше груши, но меньше, чем помидор. Соедините предметы с их весами в граммах. Веса: 120,140,150,170,1500. Предметы: банан, груша, дыня, помидор и яблоко.*

Ответ: Банан 140, груша 120, дыня 1500, помидор 150, яблоко 170.

Решение. Заметим, что дыня весит больше всех, то есть 1500. Забудем про нее. Из оставшихся четырех предметов только 120+170=140+150. банан меньше помидора, поэтому он меньший в своей паре, то есть 120 или 140, но банан больше груши, поэтому не может быть 120. Таким образом банан весит 140, помидор 150, груша 120 и яблоко 170.

3.2. *На столе лежат банан, апельсин, арбуз, киви и яблоко. Известно, что арбуз весит больше, чем оставшиеся 4 предмета. Апельсин и киви весят столько же, сколько банан и яблоко, а еще апельсин весит больше банана, но меньше, чем киви. Соедините предметы с их весами в граммах. Веса: 210,180,200,170,1400. Предметы: банан, апельсин, арбуз, киви и яблоко.*

Ответ: Апельсин 180, банан 170, арбуз 1400, киви 200, яблоко 210.

3.3. *На столе лежат банан, груша, арбуз, киви и яблоко. Известно, что арбуз весит больше, чем оставшиеся 4 предмета. Груша и киви весят столько же, сколько банан и яблоко, а еще груша весит меньше банана, но больше, чем киви. Соедините предметы с их весами в граммах. Веса: 140,150,160,170,1200. Предметы: банан, груша, арбуз, киви и яблоко.*

Ответ: Груша 160, банан 170, арбуз 1200, киви 150, яблоко 140.

3.4. *На столе лежат банан, груша, дыня, киви и яблоко. Известно, что дыня весит больше, чем оставшиеся 4 предмета. Груша и киви весят столько же, сколько банан и яблоко, а еще киви весит меньше банана, но больше, чем груша. Соедините предметы с их весами в граммах. Веса: 150,170,210,230,1600. Предметы: банан, груша, дыня, киви и яблоко.*

Ответ: Груша 170, банан 230, дыня 1600, киви 210, яблоко 150.

3.5. *На столе лежат банан, груша, дыня, апельсин и киви. Известно, что дыня весит больше, чем оставшиеся 4 предмета. Банан и киви весят столько же, сколько груша и апельсин, а еще груша весит больше, чем киви, но меньше апельсина. Соедините предметы с их весами в граммах. Веса: 140,150,160,170,1700. Предметы: банан, груша, дыня, апельсин и киви.*

Ответ: Банан 170, груша 150, дыня 1700, апельсин 160, киви 140.

4.1. *В квадрате* 4×4 *каждую из 16 клеток покрасили в чёрный или белый цвет. Затем в каждом из девяти квадратиков* 2×2 *, которые можно выделить в данном квадрате, подсчитали количество чёрных клеток. Получились числа 0, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Сколько чёрных клеток может быть в большом квадрате? Укажите все варианты.*

Ответ: 11

Решение. Заметим, что квадраты с 0 белых клеток и с 4 белыми клетками пересекаться не могут. Если квадрат с 0 белых клеток лежит не в углу, то его не пересекает не более трёх других квадратов (квадрат может быть в центре, или примыкать к стороне в середине). Пусть белый квадрат находится слева-снизу, тогда у нас есть 5 квадратов подозрительных на наличие 4 черных клеток, тогда 4 из них целиком черные, а еще один имеет 2 или 3 черных клетки. Заметим, что выделенные на рисунке 1 квадраты содержат не более 2 черных клеток, следовательно, ровно 2. Тогда три угловых квадрата либо все содержат по 4 клетки, но тогда 5 квадратов содержит 4 черных клетки; либо два угловых содержат 4, а еще один 3. Итого получается 11 клеток. На рисунках 2 и 3 показаны примеры таких расстановок.

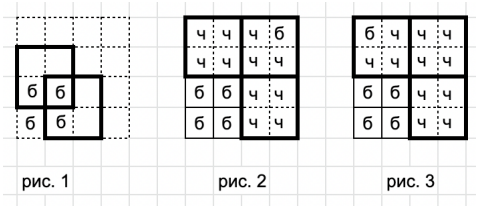


рис. 1 рис. 2 рис. 3

4.2. *В квадрате* 4×4 *каждую из 16 клеток покрасили в чёрный или белый цвет.Затем в каждом из девяти квадратиков* 2×2 *, которые можно выделить в данном квадрате, подсчитали количество чёрных клеток. Получились числа 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Сколько чёрных клеток может быть в большом квадрате? Укажите все варианты.*

Ответ: 11

4.3. *В квадрате* 4×4 *каждую из 16 клеток покрасили в чёрный или белый цвет. Затем в каждом из девяти квадратиков* 2×2 *, которые можно выделить в данном квадрате, подсчитали количество чёрных клеток. Получились числа 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4. Сколько чёрных клеток может быть в большом квадрате? Укажите все варианты.*

Ответ: 10

4.4. *В квадрате* 4×4 *каждую из 16 клеток покрасили в чёрный или белый цвет. Затем в каждом из девяти квадратиков* 2×2 *, которые можно выделить в данном квадрате, подсчитали количество чёрных клеток. Получились числа 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4. Сколько чёрных клеток может быть в большом квадрате? Укажите все варианты.*

Ответ: 6

4.5. *В квадрате* 4×4 *каждую из 16 клеток покрасили в чёрный или белый цвет. Затем в каждом из девяти квадратиков* 2×2 *, которые можно выделить в данном квадрате, подсчитали количество чёрных клеток. Получились числа 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4. Сколько чёрных клеток может быть в большом квадрате? Укажите все варианты.*

Ответ: 5

5.1. *Мама даёт карманные деньги своим детям: Ане 1 рубль, Боре два рубля, Вите три рубля, затем Ане 4 рубля, Боре 5 рублей и так далее пока не даст Ане 202 рубля, и Боре 203 рубля. На сколько рублей Аня получит больше, чем Витя?*

Ответ: 68

Решение. Заметим, что Аня получит деньги на 1 раз больше, чем Витя. Если убрать первый рубль, то каждый следующий раз Аня получает на рубль больше, чем Витя. Таким образом осталось выяснить сколько было таких разов. Кроме 1 рубля и двух рублей все «ходы» мамы разбиваются на тройки: $(203-2):3=67$. Таким образом на каждом круге Аня получит на рубль больше Вити и самым первым ходом она получила еще дополнительный рубль. Итого ответ 68.

5.2. *Мама даёт карманные деньги своим детям: Ане 1 рубль, Боре два рубля, Вите три рубля, затем Ане 4 рубля, Боре 5 рублей и так далее пока не даст Ане 292 рубля, и Боре 293 рубля. На сколько рублей Аня получит больше, чем Витя?*

Ответ: 98

5.3. *Мама даёт карманные деньги своим детям: Ане 1 рубль, Боре два рубля, Вите три рубля, затем Ане 4 рубля, Боре 5 рублей и так далее пока не даст Ане 382 рубля, и Боре 383 рубля. На сколько рублей Аня получит больше, чем Витя?*

Ответ: 128

5.4. *Мама даёт карманные деньги своим детям: Ане 1 рубль, Боре два рубля, Вите три рубля, затем Ане 4 рубля, Боре 5 рублей и так далее пока не даст Ане 322 рубля, и Боре 323 рубля. На сколько рублей Аня получит больше, чем Витя?*

Ответ: 108

5.5. *Мама даёт карманные деньги своим детям: Ане 1 рубль, Боре два рубля, Вите три рубля, затем Ане 4 рубля, Боре 5 рублей и так далее пока не даст Ане 262 рубля, и Боре 263 рубля. На сколько рублей Аня получит больше, чем Витя?*

Ответ: 88

6.1. *Найдите все возможные трёхзначные числа, которые можно получить вычеркиванием цифр из числа 112277. В ответ запишите их сумму.*

Ответ: 1159

Решение. Просто перечислим все числа, какие можно получить. Если вычеркнуты обе единицы, то варианты чисел 227 и 277.

Если вычеркнуты обе двойки, то 117 и 177. Если вычеркнуты обе семерки, то 112 и 122.

Если же никакая цифра не вычеркнута два раза, то вычеркнуты 1, 2 и 7 по одному разу, остается число 127.

Сумма этих семи чисел: $227 + 277 + 117 + 177 + 112 + 122 + 127 = 1099$.

6.2. *Найдите все возможные трёхзначные числа, которые можно получить вычеркиванием цифр из числа 332255. В ответ запишите их сумму.*

Ответ: 2149

6.3. *Найдите все возможные трёхзначные числа, которые можно получить вычеркиванием цифр из числа 114466. В ответ запишите их сумму.*

Ответ: 1598

6.4. *Найдите все возможные трёхзначные числа, которые можно получить вычеркиванием цифр из числа 113388. В ответ запишите их сумму.*

Ответ: 1416

6.5. *Найдите все возможные трёхзначные числа, которые можно получить вычеркиванием цифр из числа 227711. В ответ запишите их сумму.*

Ответ: 2689

7.1. *В отеле в ряд по порядку расположены комнаты с номерами с 1 по 10000. Маша и Алина заселились в отель в две разные комнаты. Сумма номеров их комнат 2022, а сумма номеров всех комнат между ними 3033. В какой комнате живет Маша, если её комната имеет меньший номер, чем комната Алины?*

Ответ: 1009

Решение. Если между комнатами Маши и Алины ровно одна комната, то это номер 3033, но тогда у Маши и Алины комнаты 3032 и 3034, тогда их сумма не равна 2022.

Рассмотрим комнату Б, номер которой на 1 больше, чем у комнаты Маши. Также рассмотрим комнату В, номер которой на 1 меньше, чем у Алины. Заметим, что сумма номеров комнат Б и В тоже равна 2022, следовательно, комнат между Алиной и Машей хотя бы три.

Если комнат хотя бы четыре, то возьмем комнаты Г и Д соседние с комнатами Б и В: М, Б, Г, . . . , Д, В, А. Сумма номеров Г и Д тоже 2022, но тогда сумма номеров между уже хотя бы 4044, что много.

Значит комнат между Алиной и Машей ровно 3, сумма двух крайних ровно 2022, остается средний номер 1011. Тогда наши номера: 1009, 1010, 1011, 1012, 1013. Номер Маши 1009.

7.2. *В отеле в ряд по порядку расположены комнаты с номерами с 1 по 10000. Маша и Алина заселились в отель в две разные комнаты. Сумма номеров их комнат 4004, а сумма номеров всех комнат между ними 6006. В какой комнате живет Маша, если её комната имеет меньший номер, чем комната Алины?*

Ответ: 2000

7.3. *В отеле в ряд по порядку расположены комнаты с номерами с 1 по 10000. Маша и Алина заселились в отель в две разные комнаты. Сумма номеров их комнат 4026, а сумма номеров всех комнат между ними 6039. В какой комнате живет Маша, если её комната имеет больший номер, чем комната Алины?*

Ответ: 2015

7.5. *В отеле в ряд по порядку расположены комнаты с номерами с 1 по 10000. Маша и Алина заселились в отель в две разные комнаты. Сумма номеров их комнат 4406, а сумма номеров всех комнат между ними 6609. В какой комнате живет Маша, если её комната имеет меньший номер, чем комната Алины?*

Ответ: 2201

8.1. *В партии 90000 коробок с вакциной массой по 3300 грамм каждая, и 5000 коробочек по 200 грамм каждая. Какое наименьшее количество температурных контейнеров необходимо, если в каждый, по новым правилам, нельзя класть более 100 килограмм?*

Ответ: 3000

Решение. Заметим, что в один контейнер нельзя положить более чем 30 коробок с вакциной. Таким образом менее, чем $90000/30 = 3000$ контейнеров не хватит. Заметим также, что если в контейнере лежит 30 коробок, то в нем свободно место для 5 коробочек, поэтому в свободные места все эти коробочки влезут.

8.2. *В партии 45000 коробок с вакциной массой по 3300 грамм каждая, и 5000 коробочек по 200 грамм каждая. Какое наименьшее количество температурных контейнеров необходимо, если в каждый, по новым правилам, нельзя класть более 100 килограмм?*

Ответ: 1500

8.3. *В партии 60000 коробок с вакциной массой по 3300 грамм каждая, и 5000 коробочек по 200 грамм каждая. Какое наименьшее количество температурных контейнеров необходимо, если в каждый, по новым правилам, нельзя класть более 100 килограмм?*

Ответ: 2000

8.4. *В партии 30000 коробок с вакциной массой по 6600 грамм каждая, и 7000 коробочек по 200 грамм каждая. Какое наименьшее количество температурных контейнеров необходимо, если в каждый, по новым правилам, нельзя класть более 200 килограмм?*

Ответ: 1000

8.5. *В партии 75000 коробок с вакциной массой по 6600 грамм каждая, и 11000 коробочек по 200 грамм каждая. Какое наименьшее количество температурных контейнеров необходимо, если в каждый, по новым правилам, нельзя класть более 200 килограмм?*

Ответ: 2500

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 5 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *Если к числу прибавить его последнюю цифру, то получится 5574, а если предпоследнюю, то 5573. Что это за число?*

Ответ: 5567

Решение. Заметим, что загаданное число отличается от 5574 на цифру, поэтому загаданное число не меньше $5574 - 9 = 5565$ и не больше 5574. Тогда предпоследняя цифра числа это 6 или 7, следовательно наше число это 5566 или 5567. Первое из них не подходит, а второе подходит.

1.2. *Если к числу прибавить его последнюю цифру, то получится 4366, а если предпоследнюю, то 4363. Что это за число?*

Ответ: 4358

1.3. *Если к числу прибавить его последнюю цифру, то получится 3886, а если предпоследнюю, то 3885. Что это за число?*

Ответ: 3878

1.4. *Если к числу прибавить его последнюю цифру, то получится 1992, а если предпоследнюю, то 1994. Что это за число?*

Ответ: 1986

1.5. *Если к числу прибавить его последнюю цифру, то получится 6094, а если предпоследнюю, то 6095. Что это за число?*

Ответ: 6087

2.1. *В таблице стоят числа. Оказалось, что шесть сумм: три суммы по строкам и три суммы по столбцам — одинаковые. Минимальное из чисел a, b и c равно 101. Найдите сумму $a+b+c$.*

a	1	4
2	b	5
3	6	c

Ответ: 309

Решение. Заметим, что $a+5=b+7=c+9$, следовательно, число c самое маленькое, а другие больше на 2 и на 4, то есть 103 и 105. Сумма всех трёх чисел $101+103+105=309$

2.2. *В таблице стоят числа. Оказалось, что шесть сумм: три суммы по строкам и три суммы по столбцам — одинаковые. Минимальное из чисел a, b и c равно 203. Найдите сумму $a+b+c$.*

5	2	a
6	b	3
c	7	4

Ответ: 615

2.3. *В таблице стоят числа. Оказалось, что шесть сумм: три суммы по строкам и три суммы по столбцам — одинаковые. Минимальное из чисел x, y и z равно 105. Найдите сумму $x+y+z$.*

x	1	6
2	y	8
5	9	z

Ответ: *326*

2.4. *В таблице стоят числа. Оказалось, что шесть сумм: три суммы по строкам и три суммы по столбцам — одинаковые. Минимальное из чисел x, y и z равно 204. Найдите сумму $x+y+z$.*

4	2	x
7	y	1
z	6	5

Ответ: *620*

2.5. *В таблице стоят числа. Оказалось, что шесть сумм: три суммы по строкам и три суммы по столбцам — одинаковые. Максимальное из чисел a, b и c равно 306. Найдите сумму $a+b+c$.*

a	2	6
3	b	7
5	8	c

Ответ: *911*

3.1. *Алина и Маша хотели составить интересный вариант школьного тура олимпиады. Маша предложила несколько задач и отвергла каждую вторую задачу Алины (ровно половину), Алина тоже предложила несколько задач и не отвергла только каждую третью задачу Маши (ровно треть). В итоге получилось 10 задач, а изначально предложено было 27. На сколько задач Маша предложила больше, чем Алина?*

Ответ: 15

Решение. Всего было отвернуто 17 задач. Заметим, что из задач, предложенных Алиной, поровну вошедших и отвергнутых, а из задач, предложенных Машей, отвергнутых в два раза больше, чем оставшихся в варианте. Так как отвергнуто на 7 больше чем вошло, то именно 7 задач Маши вошло в вариант, то есть предложила она 21. Так как 3 задачи Алины в варианте, то предложено было 6. Разница числа предложенных задач 21 - 6 = 15.

3.2. *Надя и Таня хотели составить интересный вариант школьного тура олимпиады. Надя предложила несколько задач и отвергла каждую вторую задачу Тани (ровно половину), Таня тоже предложила несколько задач и не отвергла только каждую третью задачу Нади (ровно треть). В итоге получилось 15 задач, а изначально предложено было 38. На сколько задач Надя предложила больше, чем Таня?*

Ответ: 10

3.3. *Алина и Маша хотели составить интересный вариант школьного тура олимпиады. Маша предложила несколько задач и отвергла каждую вторую задачу Алины (ровно половину), Алина тоже предложила несколько задач и не отвергла только каждую третью задачу Маши (ровно треть). В итоге получилось 12 задач, а изначально предложено было 33. На сколько задач Алина предложила меньше, чем Маша?*

Ответ: 21

3.4. *Кирилл и Паша хотели составить интересный вариант школьного тура олимпиады. Паши предложил несколько задач и отверг каждую вторую задачу Кирилла (ровно половину), Кирилл тоже предложил несколько задач и не отверг только каждую третью задачу Паши (ровно треть). В итоге получилось 14 задач, а изначально предложено было 36. На сколько задач Паша предложил больше, чем Кирилл?*

Ответ: 12

3.5. *Илья и Вова хотели составить интересный вариант школьного тура олимпиады. Вова предложил несколько задач и отверг каждую вторую задачу Ильи (ровно половину), Илья тоже предложил несколько задач и не отверг только каждую третью задачу Вовы (ровно треть). В итоге получилось 16 задач, а изначально предложено было 34. На сколько задач Вова предложил меньше, чем Илья?*

Ответ: 22

4.1. *На клетчатом листе закрасили прямоугольник* 1×5. *Каждую минуту закрашиваются все те не закрашенные еще клетки, для которых хотя бы одна из соседних по стороне уже закрашена. Например, через минуту будет закрашено 17 клеток. Сколько клеток будет закрашено через 5 минут?*

Ответ: 105

Решение 1. Заметим, что через 5 минут мы получим ступенчатую фигуру, в которой по строкам будет 5, 7, 9, 11, 13, 15, 13, 11, 9, 7 и 5 клеток. В сумме это 105.

Решение 2. Заметим, что если укоротить полоску до 1×1, пропадёт $4 \cdot 11 = 44$ клетки. Если в начале всего одна клетка, то за первый ход появится 4 клетки, за второй 8, потом 12, 16, 20. Сложим и получим $44 + 4 + 8 + 12 + 16 + 20 = 104$, и еще одна начальная.

4.2. *На клетчатом листе закрасили прямоугольник* 1×6. *Каждую минуту закрашиваются все те не закрашенные еще клетки, для которых хотя бы одна из соседних по стороне уже закрашена. Например, через минуту будет закрашено 20 клеток. Сколько клеток будет закрашено через 5 минут?*

Ответ: 116

4.3. *На клетчатом листе закрасили прямоугольник* 1×7. *Каждую минуту закрашиваются все те не закрашенные еще клетки, для которых хотя бы одна из соседних по стороне уже закрашена. Например, через минуту будет закрашено 23 клетки. Сколько клеток будет закрашено через 4 минуты?*

Ответ: 95

4.4. *На клетчатом листе закрасили прямоугольник* 2×3. *Каждую минуту закрашиваются все те не закрашенные еще клетки, для которых хотя бы одна из соседних по стороне уже закрашена. Например, через минуту будет закрашено 16 клеток. Сколько клеток будет закрашено через 4 минуты?*

Ответ: 70

4.5. *На клетчатом листе закрасили прямоугольник* 2×4. *Каждую минуту закрашиваются все те не закрашенные еще клетки, для которых хотя бы одна из соседних по стороне уже закрашена. Например, через минуту будет закрашено 20 клеток. Сколько клеток будет закрашено через 4 минуты?*

Ответ: 80

5.1. *Девочка по четвергам и пятницам всегда говорит правду, а по понедельникам всегда врёт. В остальные дни недели может сказать правду, а может соврать. Однажды её семь дней подряд спрашивали, в каком году она родилась. В первые шесть дней были получены ответы 2010, 2011, 2012, 2013, 2002, 2011. Какой ответ мог быть получен на седьмой день? Укажите все варианты.*

Ответ: 2011 или 2010

Решение. Заметим, что если бы среди указанных 6 дней был бы четверг и пятница, то какие-то два соседних ответа были бы одинаковы. Значит, либо первый день это пятница, либо последний четверг. Откуда и получаем варианты ответов.

5.2. *Девочка по субботам и воскресеньям всегда говорит правду, а по вторникам всегда врёт. В остальные дни недели может сказать правду, а может соврать. Однажды её семь дней подряд спрашивали, в каком году она родилась. В первые шесть дней были получены ответы 2015, 2016, 2010, 2011, 2015, 2014. Какой ответ мог быть получен на седьмой день? Укажите все варианты.*

Ответ: 2015 или 2014

5.3. *Девочка по понедельникам и вторникам всегда говорит правду, а по четвергам всегда врёт. В остальные дни недели может сказать правду, а может соврать. Однажды её семь дней подряд спрашивали, какого числа она родилась. В первые шесть дней были получены ответы 10, 12, 14, 13, 12, 14. Какой ответ мог быть получен на седьмой день? Укажите все варианты.*

Ответ: 10 или 14

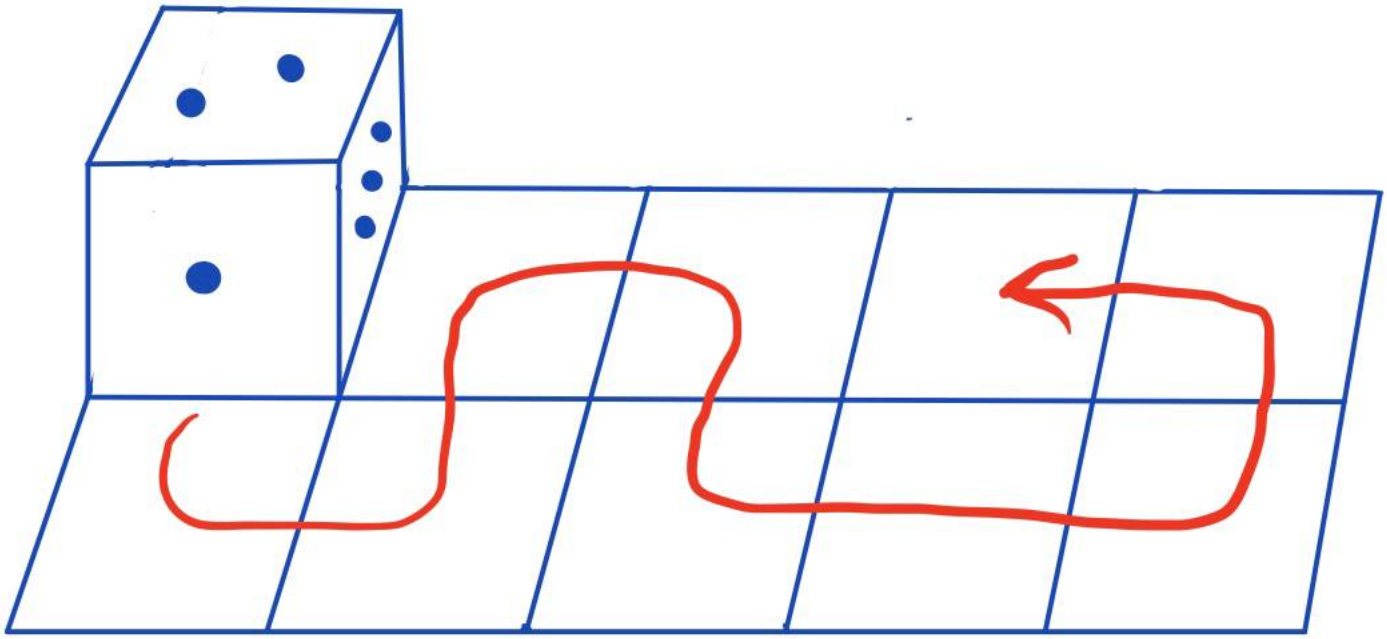
5.4. *Мальчик по средам и четвергам всегда говорит правду, а по воскресеньям всегда врёт. В остальные дни недели может сказать правду, а может соврать. Однажды его семь дней подряд спрашивали, какого числа он родился. В первые шесть дней были получены ответы 15, 16, 15, 17, 18, 17. Какой ответ мог быть получен на седьмой день? Укажите все варианты.*

Ответ: 15 или 17

5.5. *Мальчик по средам и четвергам всегда говорит правду, а по понедельникам всегда врёт. В остальные дни недели может сказать правду, а может соврать. Однажды его семь дней подряд спрашивали, в каком году он родился. В первые шесть дней были получены ответы 2011, 2010, 2012, 2011, 2002, 2012. Какой ответ мог быть получен на седьмой день? Укажите все варианты.*

Ответ: 2011 или 2012

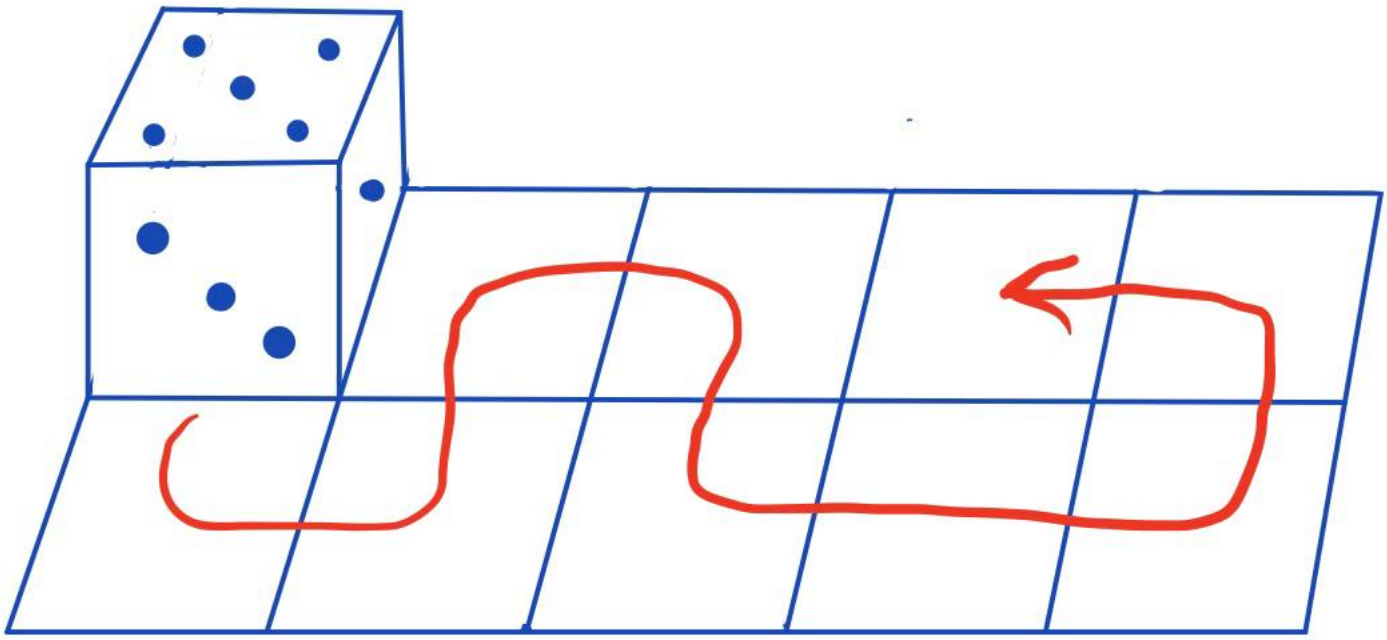
6.1. *На плоскости лежит кубик. На каждой грани отмечено от 1 до 6 точек так, что на противоположных гранях в сумме всегда 7 точек. Кубик перекатывают по плоскости как показано на картинке. Сколько точек будет на верхней грани кубика, когда он окажется на последней клетке?*



Ответ: 5

Решение. Для того чтобы выяснить ответ, надо представить что вы катите кубик в обратном направлении и каждый раз следить где окажется грань, которая в самом конце будет сверху. Получается, что эта грань будет нижней в исходном положении кубика. Так как на верхней грани 2 точки, то на нижней сейчас 5 точек.

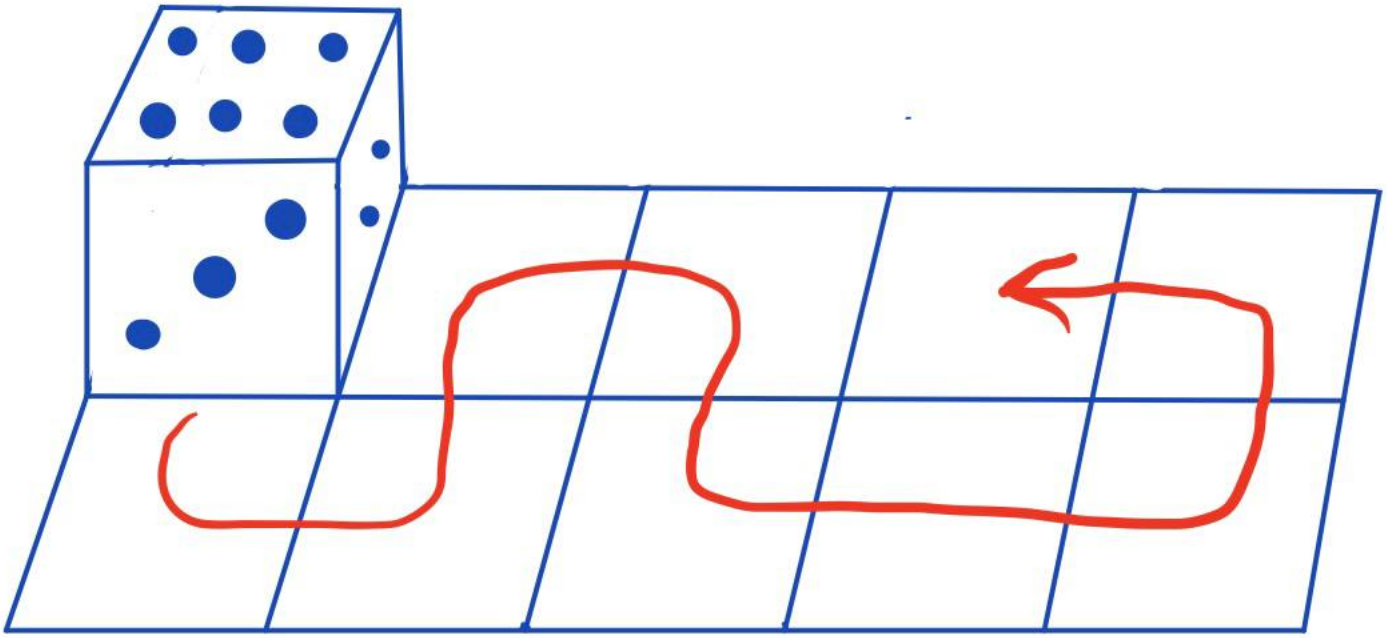
6.2. *На плоскости лежит кубик. На каждой грани отмечено от 1 до 6 точек так, что на противоположных гранях в сумме всегда 7 точек. Кубик перекатывают по плоскости как показано на картинке. Сколько точек будет на верхней грани кубика, когда он окажется на последней клетке?*



Ответ: 2

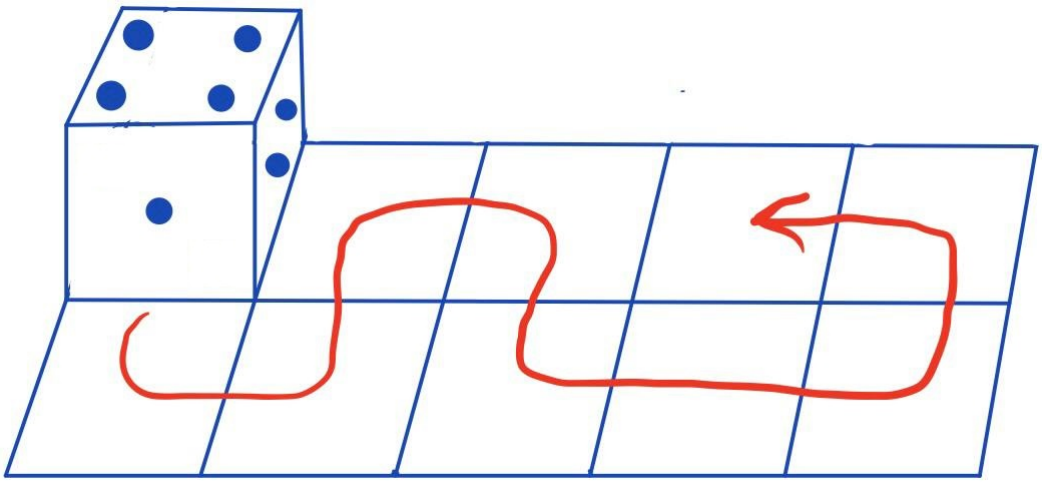
6.3.На *плоскости лежит кубик. На каждой грани отмечено от 1 до 6 точек так, что на противоположных гранях в сумме всегда 7 точек. Кубик перекатывают по плоскости как показано на картинке.*

Сколько точек будет на верхней грани кубика, когда он окажется на последней клетке?



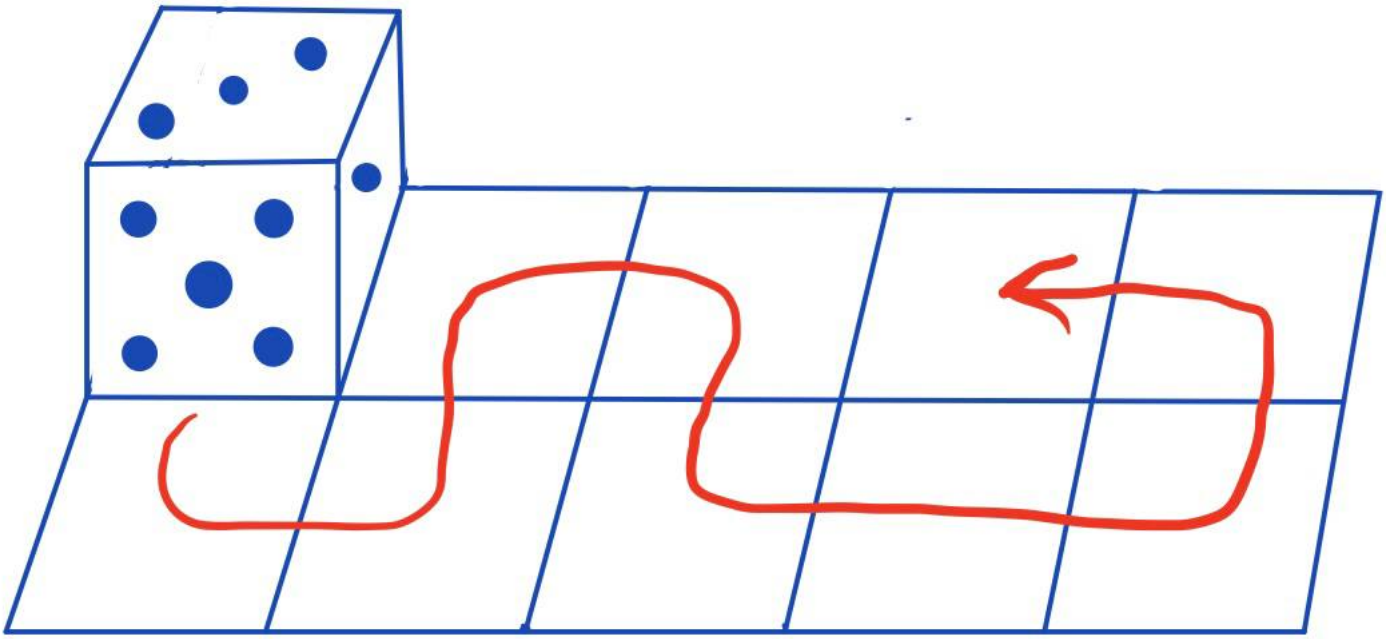
Ответ: 1

6.4. *На плоскости лежит кубик. На каждой грани отмечено от 1 до 6 точек так, что на противоположных гранях в сумме всегда 7 точек. Кубик перекатывают по плоскости как показано на картинке. Сколько точек будет на верхней грани кубика, когда он окажется на последней клетке?*



Ответ: 3

6.5. *На плоскости лежит кубик. На каждой грани отмечено от 1 до 6 точек так, что на противоположных гранях в сумме всегда 7 точек. Кубик перекатывают по плоскости как показано на картинке. Сколько точек будет на верхней грани кубика, когда он окажется на последней клетке?*



Ответ: 4

7.1. *На доску выписали шесть подряд идущих чисел. Когда вычеркнули одно из них и сложили оставшиеся, получилось 10085. Какое число могло быть вычеркнуто? Укажите все варианты.*

Ответ: 2020 или 2014

Решение. Заметим, что сумма пяти подряд идущих чисел равна среднему из них, умноженному на 5. Если у нас есть пять из шести подряд идущих чисел, и они идут не подряд, то можно увеличить 1, 2, 3 или 4 из них на 1 так, чтобы числа стали подряд идущими. Так как сумма данных нам чисел кратна 5, то они были подряд идущими, иначе мы увеличили не более, чем 4 из них, и сумма опять стала кратной 5.

Таким образом, у нас есть 5 подряд идущих чисел, и среднее из них равно $10085 : 5 = 2017$. Но тогда наши оставшиеся числа это 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, следовательно, вычеркнули 2014 или 2020.

7.2. *На доску выписали шесть подряд идущих чисел, вычеркнули одно из них и оставшиеся сложили,получилось 10115. Какое число могло быть вычеркнуто? Укажите все варианты.*

Ответ: 2020 или 2026

7.3. *На доску выписали шесть подряд идущих чисел, вычеркнули одно из них и оставшиеся сложили,получилось 10235. Какое число могло быть вычеркнуто? Укажите все варианты.*

Ответ: 2044 или 2050

7.4. *На доску выписали шесть подряд идущих чисел, вычеркнули одно из них и оставшиеся сложили,получилось 10345. Какое число могло быть вычеркнуто? Укажите все варианты.*

Ответ: 2066 или 2072

7.5. *На доску выписали шесть подряд идущих чисел, вычеркнули одно из них и оставшиеся сложили,получилось 10455. Какое число могло быть вычеркнуто? Укажите все варианты.*

Ответ: 2088 или 2094

8.1. *Четырёхзначное число назовем «красивым», если к нему нельзя приписать справа цифру так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 11. А сколько существует красивых чисел, больших 3100 и меньших 3600?*

Ответ: 46

Решение. Заметим, что число 3101 является красивым потому, что 31009 и 31020 делятся на 11, следовательно 3101$*$ на 11 делиться не может. Предположим число красивое, тогда мы нашли 10 подряд идущих чисел, ни одно из которых на 11 не делится, но среди 11 подряд идущих чисел хотя бы одно делится на 11, значит следующее число делится на 11. Это число на 1 больше нашего четырехзначного, к которому приписали 0. Значит число $\overline{3abc}$ красивое, если $\overline{3abc}+1$ делится на 11.

Заметим, что минимальное число в заданном множестве, делящееся на 11 - это 3102, а максимальное - 3597. Этих чисел столько же, сколько частных от деления их на 11: 282, ..., 327, а это $327-281=46$ чисел

8.2. *Четырёхзначное число назовем «красивым», если к нему нельзя приписать справа цифру так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 11. А сколько существует красивых чисел, больших 4200 и меньших 4900?*

Ответ: 64

8.3. *Четырёхзначное число назовем «красивым», если к нему нельзя приписать справа цифру так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 11. А сколько существует красивых чисел, больших 5300 и меньших 5900?*

Ответ: 55

8.4. *Четырёхзначное число назовем «красивым», если к нему нельзя приписать справа цифру так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 11. А сколько существует красивых чисел, больших 6100 и меньших 6700?*

Ответ: 55

8.5. *Четырёхзначное число назовем «красивым», если к нему нельзя приписать справа цифру так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 11. А сколько существует красивых чисел, больших 7100 и меньших 7900?*

Ответ: 73

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 6 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *Арина записала число и номер месяца своего дня рождения, перемножила и получила 248. В каком месяце родилась Арина? В ответ запишите его номер.*

Ответ: 8

Решение. $248 = 2 * 2 * 2 * 31$. Очевидно, 31 - это число, тогда 8 - номер месяца.

1.2. *Арина записала число и номер месяца своего дня рождения, перемножила и получила 232. В каком месяце родилась Арина? В ответ запишите его номер.*

Ответ: 8

1.3. *Арина записала число и номер месяца своего дня рождения, перемножила и получила 261. В каком месяце родилась Арина? В ответ запишите его номер.*

Ответ: 9

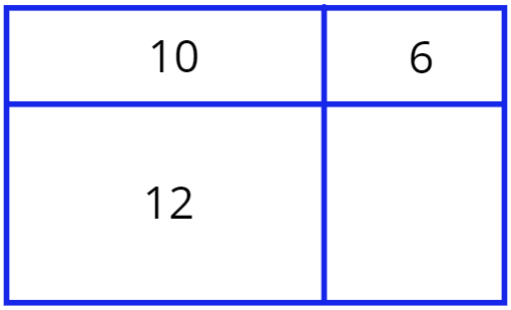
1.4. *Арина записала число и номер месяца своего дня рождения, перемножила и получила 348. В каком месяце родилась Арина? В ответ запишите его номер.*

Ответ: 12

1.5. *Арина записала число и номер месяца своего дня рождения, перемножила и получила 217. В каком месяце родилась Арина? В ответ запишите его номер.*

Ответ: 7

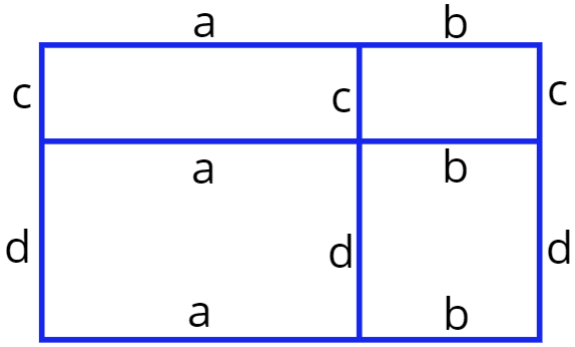
2.1. *Прямоугольник разделили двумя прямыми линиями на 4 прямоугольника периметром 6, 10 и 12 (прямоугольник периметром 10 по стороне соседствует с прямоугольниками периметрами 6 и 12). Найдите периметр четвертого прямоугольника.*



Ответ: 8

Решение. Обозначим стороны получившихся прямоугольников за a, b, c и d. Из условия получаются следующие соотношения:

$2(a+c)=10$, $2(a+d)=12$, $2(c+b)=6$,
$a+c=5$, $a+d=6$, $c+b=3$,
$a+d+c+b=9$, $a+c=5$,
$b+d=4$, $2(b+d)=8$.



Значит, периметр четвертого прямоугольника равен 8.

2.2. *Прямоугольник разделили двумя прямыми линиями на 4 прямоугольника периметром 6, 10 и 14 (прямоугольник периметром 10 по стороне соседствует с прямоугольниками периметрами 6 и 14). Найдите периметр четвертого прямоугольника.*

Ответ: 10

2.3. *Прямоугольник разделили двумя прямыми линиями на 4 прямоугольника периметром 8, 10 и 14 (прямоугольник периметром 10 по стороне соседствует с прямоугольниками периметрами 8 и 14). Найдите периметр четвертого прямоугольника.*

Ответ: 12

2.4. *Прямоугольник разделили двумя прямыми линиями на 4 прямоугольника периметром 8, 12 и 16 (прямоугольник периметром 12 по стороне соседствует с прямоугольниками периметрами 8 и 16). Найдите периметр четвертого прямоугольника.*

Ответ: 12

2.5. *Прямоугольник разделили двумя прямыми линиями на 4 прямоугольника периметром 8, 14 и 16 (прямоугольник периметром 14 по стороне соседствует с прямоугольниками периметрами 8 и 16). Найдите периметр четвертого прямоугольника.*

Ответ: 10

3.1. *Число умножили на первую цифру и получили 494, на вторую – 988, на третью – 1729. Найдите это число.*

Ответ: 247

Решение. Можно заметить, что все три полученных числа кратны 247, откуда получаем ответ.

3.2. *Число умножили на первую цифру и получили 566, на вторую – 2264, на третью – 849. Найдите это число.*

Ответ: 283

3.3. *Число умножили на первую цифру и получили 526, на вторую – 1578, на третью – 789. Найдите это число.*

Ответ: 263

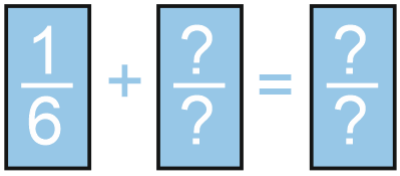
3.4. *Число умножили на первую цифру и получили 514, на вторую – 1285, на третью – 1799. Найдите это число.*

Ответ: 257

3.5. *Число умножили на первую цифру и получили 478, на вторую — 717, на третью – 2151. Найдите это число.*

Ответ: 239

4.1. *К дроби* $\frac{1}{6}$ *добавили какую-то дробь, а результат оказался правильной дробью со знаменателем меньше 6. Какую наибольшую дробь могли добавить?*



Ответ: $\frac{19}{30}$

Решение. Так как результат сложения дробей - правильная дробь со знаменателем, меньшим 6, наибольшее значение суммы составляет $\frac{4}{5}$. Для ее получения необходимо добавить $\frac{4}{5} - \frac{1}{6} = \frac{19}{30}$.

4.2. *К дроби* $\frac{1}{7}$ *добавили какую-то дробь, а результат оказался правильной дробью со знаменателем меньше 6. Какую наибольшую дробь могли добавить?*

Ответ: $\frac{23}{35}$

4.3. *К дроби* $\frac{1}{7}$ *добавили какую-то дробь, а результат оказался правильной дробью со знаменателем меньше 5. Какую наибольшую дробь могли добавить?*

Ответ: $\frac{17}{28}$

4.4. *К дроби* $\frac{1}{6}$ *добавили какую-то дробь, а результат оказался правильной дробью со знаменателем меньше 8. Какую наибольшую дробь могли добавить?*

Ответ: $\frac{29}{42}$

4.5. *К дроби* $\frac{1}{7}$ *добавили какую-то дробь, а результат оказался правильной дробью со знаменателем меньше 7. Какую наибольшую дробь могли добавить?*

Ответ: $\frac{29}{42}$

5.1. *Известно, что в прошедшем шахматном турнире в каждом туре все игроки разбивались на пары, проигравший выбывал (ничьих не было). Известно, что победитель сыграл 6 партий. Сколько участников турнира выиграло хотя бы на 2 партии больше, чем проиграло?*

Ответ: 8

Решение. Так как победитель сыграл 6 партий, всего игроков было $2^6 = 64$. У вылетевших в 1м туре соотношение "выиграл-проиграл"составляет -1; у проигравших во 2м туре 0, у проигравших в 3м туре +1, у проигравших в 4м туре и далее хотя бы +2. До 4го тура дошло 8 участников.

5.2. *В шахматном турнире в каждом туре все игроки делятся на пары, проигравший выбывает. Известно, что победитель сыграл 5 партий. Сколько участников турнира выиграло хотя бы на 2 партии больше, чем проиграло?*

Ответ: 4

5.3. *В шахматном турнире в каждом туре все игроки делятся на пары, проигравший выбывает. Известно, что победитель сыграл 7 партий. Сколько участников турнира выиграло хотя бы на 2 партии больше, чем проиграло?*

Ответ: 16

5.4. *В шахматном турнире в каждом туре все игроки делятся на пары, проигравший выбывает. Известно, что победитель сыграл 6 партий. Сколько участников турнира выиграло хотя бы на 3 партии больше, чем проиграло?*

Ответ: 4

5.5. *В шахматном турнире в каждом туре все игроки делятся на пары, проигравший выбывает. Известно, что победитель сыграл 7 партий. Сколько участников турнира выиграло хотя бы на 3 партии больше, чем проиграло?*

Ответ: 8

6.1. *В баскетбольной команде некоторое количество игроков. Тренер сложил все значения их роста и поделил на количество игроков (назовем это средним ростом), получив 190 см. После первой игры тренер вывел из команды Николая ростом 197 см, взяв вместо него Петра ростом 181 см, после чего средний рост игроков команды составил 188 см. Сколько человек в команде?*

Ответ: 8

Решение. Изменение суммарного роста игроков на $197 - 181 = 16$ см влечет к изменению среднего роста игроков команды на $190 - 188 = 2$ см, поэтому в команде $\frac{16}{2} = 8$ человек.

6.2. *В баскетбольной команде некоторое количество игроков. Тренер сложил все значения их роста и поделил на количество игроков (назовем это средним ростом), получив 190 см. После первой игры тренер вывел из команды Николая ростом 196 см, взяв вместо него Петра ростом 182 см, после чего средний рост игроков команды составил 188 см. Сколько человек в команде?*

Ответ: 7

6.3. *В баскетбольной команде некоторое количество игроков. Тренер сложил все значения их роста и поделил на количество игроков (назовем это средним ростом), получив 190 см. После первой игры тренер вывел из команды Николая ростом 195 см, взяв вместо него Петра ростом 183 см, после чего средний рост игроков команды составил 188 см. Сколько человек в команде?*

Ответ: 6

6.4. *В баскетбольной команде некоторое количество игроков. Тренер сложил все значения их роста и поделил на количество игроков (назовем это средним ростом), получив 191 см. После первой игры тренер вывел из команды Николая ростом 198 см, взяв вместо него Петра ростом 180 см, после чего средний рост игроков команды составил 188 см. Сколько человек в команде?*

Ответ: 6

6.5. *В баскетбольной команде некоторое количество игроков. Тренер сложил все значения их роста и поделил на количество игроков (назовем это средним ростом), получив 192 см. После первой игры тренер вывел из команды Николая ростом 198 см, взяв вместо него Петра ростом 182 см, после чего средний рост игроков команды составил 188 см. Сколько человек в команде?*

Ответ: 4

7.1. *На прилавке лежат 10 гирек массой* $n, n+1, ..., n+9$. *Продавец взял одну из них, после чего общий вес всех оставшихся составил* 1457. *Гирьку какого веса взял продавец?*

Ответ: 158

Решение. Общий вес всех 10 гирь составляет $10n+45$. Допустим, взятая гиря имеет вес $n+x$, где $x < 10$. Тогда

$10n + 45 - n - x = 1457$.

$9n + 45 - x = 1457$.

Можно увидеть, что 1457 при делении на 9 дает 8 в остатке, поэтому $x = 1$. Тогда

$9n + 45 - 1 = 1457$.

$9n = 1413$.

$n = 157$.

$n + x = 158$.

7.2. *На прилавке лежат 10 гирек массой* $n, n+1, ..., n+9$. *Продавец взял одну из них, после чего общий вес всех оставшихся составил* 1365. *Гирьку какого веса взял продавец?*

Ответ: 150

7.3. *На прилавке лежат 10 гирек массой* $n, n+1, ..., n+9$. *Продавец взял одну из них, после чего общий вес всех оставшихся составил* 1543. *Гирьку какого веса взял продавец?*

Ответ: 172

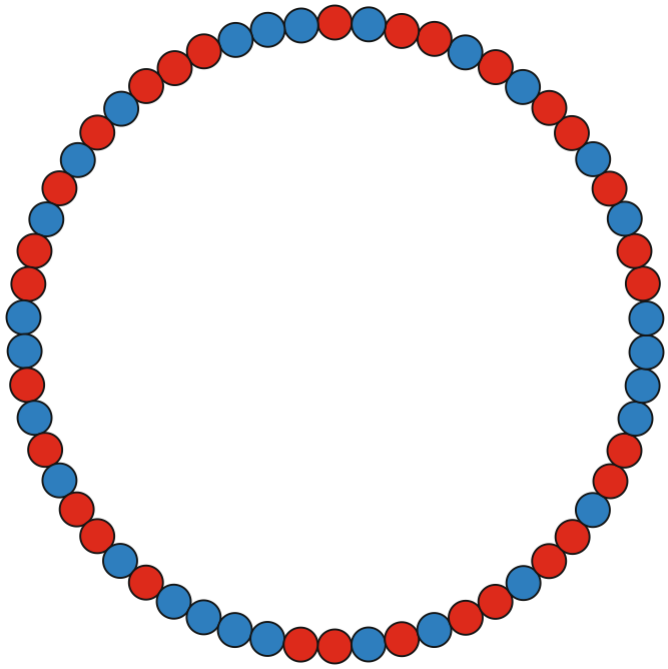
7.4. *На прилавке лежат 10 гирек массой* $n, n+1, ..., n+9$. *Продавец взял одну из них, после чего общий вес всех оставшихся составил* 1325. *Гирьку какого веса взял продавец?*

Ответ: 150

7.5. *На прилавке лежат 10 гирек массой* $n, n+1, ..., n+9$. *Продавец взял одну из них, после чего общий вес всех оставшихся составил* 1632. *Гирьку какого веса взял продавец?*

Ответ: 183

8.1. *В круг выложили 58 шаров двух цветов - красного и синего. Известно, что троек подряд стоящих шаров, среди которых больше красных, столько же, сколько и троек с большинством синих. Какое наименьшее число красных шаров могло оказаться?*

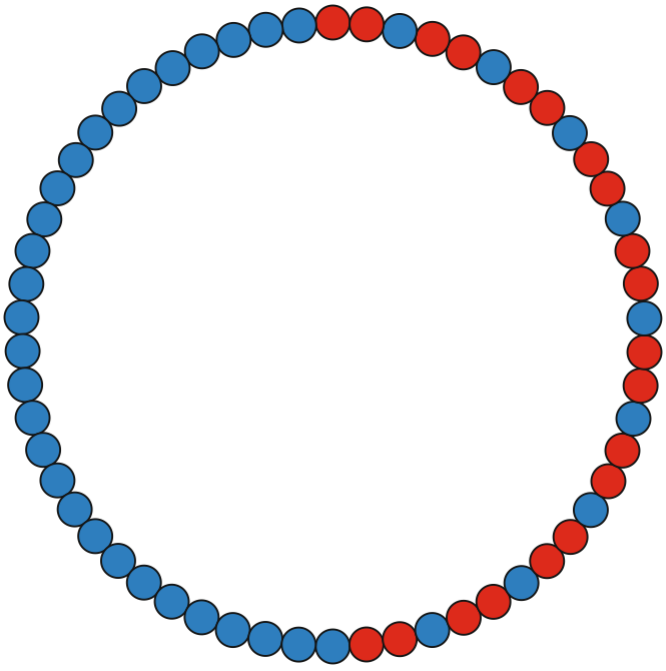


Ответ: 20

Оценка

Всего троек 58, тогда троек с доминированием каждого из двух цветов по 29. Значит, красных шаров должно быть не менее, чем $\frac{2}{3} * 29$, то есть не менее 20.

Пример



8.2. *В круг выложили 64 шара двух цветов – красного и синего. Известно, что троек подряд стоящих шаров, среди которых больше красных, столько же, сколько и троек с большинством синих. Какое наименьшее число красных шаров могло оказаться?*

Ответ: 22

8.3. *В круг выложили 70 шаров двух цветов – красного и синего. Известно, что троек подряд стоящих шаров, среди которых больше красных, столько же, сколько и троек с большинством синих. Какое наименьшее число красных шаров могло оказаться?*

Ответ: 24

8.4. *В круг выложили 76 шаров двух цветов – красного и синего. Известно, что троек подряд стоящих шаров, среди которых больше красных, столько же, сколько и троек с большинством синих. Какое наименьшее число красных шаров могло оказаться?*

Ответ: 26

8.5. *В круг выложили 82 шара двух цветов – красного и синего. Известно, что троек подряд стоящих шаров, среди которых больше красных, столько же, сколько и троек с большинством синих. Какое наименьшее число красных шаров могло оказаться?*

Ответ: 28

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 7 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *Произведение 3 целых чисел равно -5. Какие значения может принимать их сумма? Обязательно укажите все варианты.*

Ответ: 5 или -3 или -7

Решение. Так как 5 не делится ни на какое другое число, кроме 1 и самого себя, то единственные три множителя, дающие в произведении 5, это 1, 1 и 5. Так как знак произведения отрицательный, то или какое-то одно, или все три числа отрицательные. Получаем следующие варианты: $1 + 1 - 5 = -3$; $1 - 1 + 5 = 5$; $-1 - 1 - 5 = -7$.

1.2. *Произведение 3 целых чисел равно -7. Какие значения может принимать их сумма? Обязательно укажите все варианты.*

Ответ: -5 или 7 или -9

1.3. *Произведение 3 целых чисел равно -17. Какие значения может принимать их сумма? Обязательно укажите все варианты.*

Ответ: -15 или 17 или -19

1.4. *Произведение 3 целых чисел равно -11. Какие значения может принимать их сумма? Обязательно укажите все варианты.*

Ответ: -9 или 11 или -13

1.5. *Произведение 3 целых чисел равно -13. Какие значения может принимать их сумма? Обязательно укажите все варианты.*

Ответ: -11 или 13 или -15

2.1. *Петя выписывает на доску такие различные трехзначные натуральные числа, что каждое из них делится нацело на 3, а первые две цифры отличаются на 2. Какое наибольшее количество таких чисел он может выписать, если они заканчиваются на 6 или на 7?*

Ответ: 9

Решение. Число делится на 3, если сумма цифр кратна 3. Если число оканчивается на 6, то сумма двух других цифр дает в остатке 0 при делении на 3. Такие числа: 2, 4 и 4, 2; 5, 7 и 7, 5. Если число оканчивается на 7, то сумма двух других цифр дает в остатке 2 при делении на 3. Такие числа: 2, 0; 3, 5 и 5, 3; 6, 8 и 8, 6. Всего получается 9 чисел: 246, 426, 576, 756, 207, 357, 537, 687, 867.

2.2. *Петя выписывает на доску такие различные трехзначные натуральные числа, что каждое из них делится нацело на 3, а первые две цифры отличаются на 3. Какое наибольшее количество таких чисел он может выписать, если они заканчиваются на 4 или на 5?*

Ответ: 8

2.3. *Петя выписывает на доску такие различные трехзначные натуральные числа, что каждое из них делится нацело на 3, а первые две цифры отличаются на 4. Какое наибольшее количество таких чисел он может выписать, если они заканчиваются на 4 или на 5?*

Ответ: 7

2.4. *Петя выписывает на доску такие различные трехзначные натуральные числа, что каждое из них делится нацело на 3, а первые две цифры отличаются на 4. Какое наибольшее количество таких чисел он может выписать, если они заканчиваются на 8 или на 9?*

Ответ: 7

2.5. *Петя выписывает на доску такие различные трехзначные натуральные числа, что каждое из них делится нацело на 3, а первые две цифры отличаются на 2. Какое наибольшее количество таких чисел он может выписать, если они заканчиваются на 3 или на 4?*

Ответ: 9

3.1. *Каждый час между двумя соседними кустами крапивы в ряду вырастает еще два таких же. Сколько кустов вам нужно посадить изначально, чтобы через три часа всех кустов вместе стало* 190*?*

Ответ: 8

Решение. Если в данный момент имеется n кустов, то на следующем ходе их количество увеличивается на $2(n-1)$. Так, если через 3 часа всех кустов должно быть 190, то за час до этого их должно быть $\frac{190-1}{3}+1 = 64$. Еще за час $\frac{64-1}{3}+1 = 22$. И на следующем ходу $\frac{22-1}{3}+1 = 8$.

3.2. *Каждый час между двумя соседними кустами крапивы в ряду вырастает еще два таких же. Сколько кустов вам нужно посадить изначально, чтобы через три часа всех кустов вместе стало* 217*?*

Ответ: 9

3.3. *Каждый час между двумя соседними кустами крапивы в ряду вырастает еще два таких же. Сколько кустов вам нужно посадить изначально, чтобы через три часа всех кустов вместе стало* 244*?*

Ответ: 10

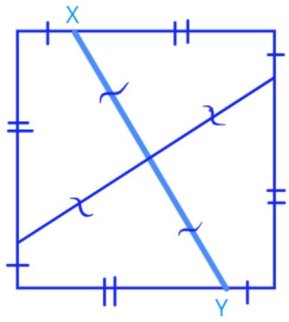
3.4. *Каждый час между двумя соседними кустами крапивы в ряду вырастает еще четыре таких же. Сколько кустов вам нужно посадить изначально, чтобы через два часа всех кустов вместе стало* 201*?*

Ответ: 9

3.5. *Каждый час между двумя соседними кустами крапивы в ряду вырастает еще пять таких же. Сколько кустов вам нужно посадить изначально, чтобы через два часа всех кустов вместе стало* 253*?*

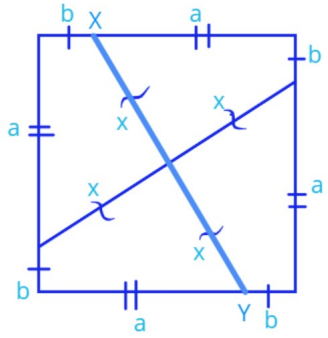
Ответ: 8

4.1. *Квадратный торт периметром 100 см поделили двумя прямолинейными разрезами на четыре одинаковых кусочка, каждый периметром 56 см. На картинке изображён торт, разрезы и отмечены равные отрезки. Чему равна длина разреза XY?*

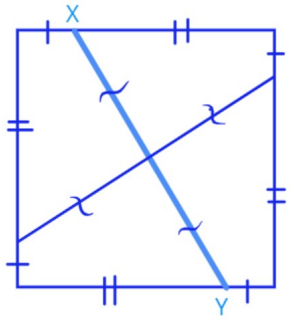


Ответ: 31

Решение. Как видно из рисунка, все четыре маленьких четырехугольника состоят из одних и тех же отрезков. Периметр каждого из них равен $a + b + 2x = 56$. Периметр всего квадрата $4(a + b) = 100$, откуда $a + b = 25$. Тогда $a + b + 2x = 56$, $25 + 2x = 56$, $2x = 31$.

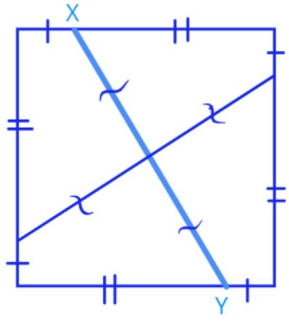


4.2. *Квадратный торт периметром 100 см поделили двумя прямолинейными разрезами на четыре одинаковых кусочка, каждый периметром 58 см. На картинке изображён торт, разрезы и отмечены равные отрезки. Чему равна длина разреза XY?*



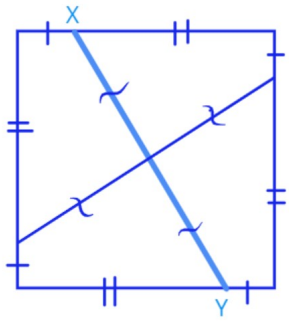
Ответ: 33

4.3. *Квадратный торт периметром 100 см поделили двумя прямолинейными разрезами на четыре одинаковых кусочка, каждый периметром 60 см. На картинке изображён торт, разрезы и отмечены равные отрезки. Чему равна длина разреза XY?*



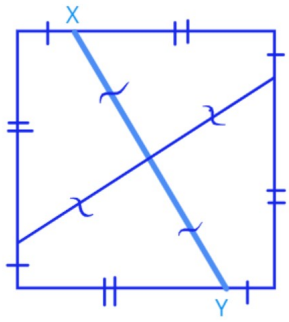
Ответ: 35

4.4. *Квадратный торт периметром 100 см поделили двумя прямолинейными разрезами на четыре одинаковых кусочка, каждый периметром 62 см. На картинке изображён торт, разрезы и отмечены равные отрезки. Чему равна длина разреза XY?*



Ответ: 37

4.5. *Квадратный торт периметром 100 см поделили двумя прямолинейными разрезами на четыре одинаковых кусочка, каждый периметром 64 см. На картинке изображён торт, разрезы и отмечены равные отрезки. Чему равна длина разреза XY?*



Ответ: 39

5.1. *40 человек пришли в комнату, в которой находились 40 стульев черного и белого цвета, и сели на них. Все они сказали, что сидят на черных стульях. Потом они как-то пересели и ровно 16 заявило, что они сидят на белом стуле. Каждый из сидящих при этом либо оба раза соврал, либо оба раза сказал правду. Сколько при этом во второй раз было тех, кто соврал и сидел на черном стуле?*

Ответ: 8

Решение. Изначально все, кто сказал правду, сидели на черных стульях, и все, кто сказал ложь - на белых. После этого какая-то часть поменялась стульями - и 16 заявило, что сидят на белых. Очевидно, сюда входят те, кто сказал правду и сидел на белых, и те, с кем они поменялись - они сказали ложь и сидели на черных. Так как их число равно, то ровно половина из них - соврали и сидели на черном стуле, то есть 8.

5.2. *40 человек пришли в комнату, в которой находились 40 стульев черного и белого цвета, и сели на них. Все они сказали, что сидят на черных стульях. Потом они как-то пересели и ровно 10 заявило, что они сидят на белом стуле. Каждый из сидящих при этом либо оба раза соврал, либо оба раза сказал правду. Сколько при этом во второй раз было тех, кто соврал и сидел на черном стуле?*

Ответ: 5

5.3. *40 человек пришли в комнату, в которой находились 40 стульев черного и белого цвета, и сели на них. Все они сказали, что сидят на черных стульях. Потом они как-то пересели и ровно 12 заявило, что они сидят на белом стуле. Каждый из сидящих при этом либо оба раза соврал, либо оба раза сказал правду. Сколько при этом во второй раз было тех, кто соврал и сидел на черном стуле?*

Ответ: 6

5.4. *40 человек пришли в комнату, в которой находились 40 стульев черного и белого цвета, и сели на них. Все они сказали, что сидят на черных стульях. Потом они как-то пересели и ровно 18 заявило, что они сидят на белом стуле. Каждый из сидящих при этом либо оба раза соврал, либо оба раза сказал правду. Сколько при этом во второй раз было тех, кто соврал и сидел на черном стуле?*

Ответ: 9

5.5. *40 человек пришли в комнату, в которой находились 40 стульев черного и белого цвета, и сели на них. Все они сказали, что сидят на черных стульях. Потом они как-то пересели и ровно 14 заявило, что они сидят на белом стуле. Каждый из сидящих при этом либо оба раза соврал, либо оба раза сказал правду. Сколько при этом во второй раз было тех, кто соврал и сидел на черном стуле?*

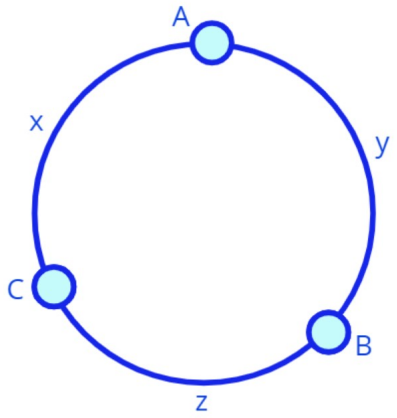
Ответ: 7

6.1. *На кольцевой дороге три города: A, B и C. Известно, что путь из A в C в 3 раза длиннее по дуге, не содержащей B, чем через B. Путь из B в C в 4 раза короче по дуге, не содержащей A, чем через A. Во сколько раз путь из A в B короче по дуге, не содержащей C, чем через C?*

Ответ: 19

Решение. Из условия задачи следует соотношение:

$x = 3(y + z)$
$4z = x + y$
$3y + 3z = 4z - y$
$4y = z$
$x = 15y$
$x + z = 19y$.



6.2. *На кольцевой дороге три города: A, B и C. Известно, что путь из A в C в 4 раза длиннее по дуге, не содержащей B, чем через B. Путь из B в C в 5 раза короче по дуге, не содержащей A, чем через A. Во сколько раз путь из A в B короче по дуге, не содержащей C, чем через C?*

Ответ: 29

6.3. *На кольцевой дороге три города: A, B и C. Известно, что путь из A в C в 2 раза длиннее по дуге, не содержащей B, чем через B. Путь из B в C в 3 раза короче по дуге, не содержащей A, чем через A. Во сколько раз путь из A в B короче по дуге, не содержащей C, чем через C?*

Ответ: 11

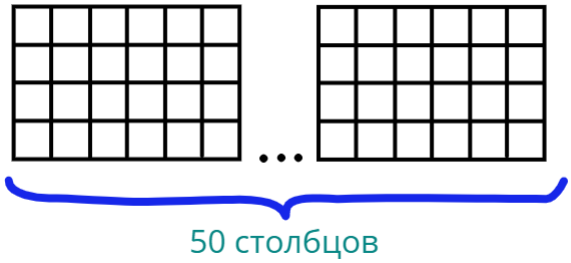
6.4. *На кольцевой дороге три города: A, B и C. Известно, что путь из A в C в 5 раз длиннее по дуге, не содержащей B, чем через B. Путь из B в C в 6 раз короче по дуге, не содержащей A, чем через A. Во сколько раз путь из A в B короче по дуге, не содержащей C, чем через C?*

Ответ: 41

6.5. *На кольцевой дороге три города: A, B и C. Известно, что путь из A в C в 6 раз длиннее по дуге, не содержащей B, чем через B. Путь из B в C в 7 раз короче по дуге, не содержащей A, чем через A. Во сколько раз путь из A в B короче по дуге, не содержащей C, чем через C?*

Ответ: 55

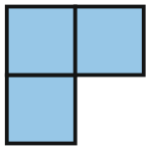
7.1. *Антон закрашивает какую-то ячейку в прямоугольнике* 4×50. *Затем он снова выбирает незакрашенную ячейку, соседствующую по стороне не более чем с одной уже закрашенной ячейкой, и так далее. Какое наибольшее число ячеек может быть закрашено?*



Ответ: 150

Оценка

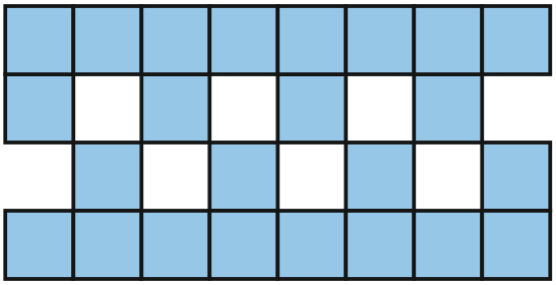
Разобьем весь прямоугольник на 50 квадратов 2x2. В каждом таком квадрате можно покрасить не более 3x ячеек.



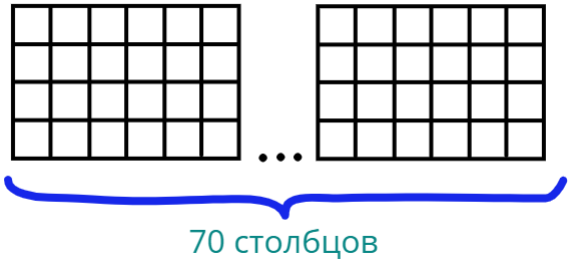
Тогда всего можно покрасить на более $3 * 50 = 150$ ячеек.

Пример

Покрасим последовательно весь верхний и весь нижний ряд. Два средних покрасим в шахматном порядке.

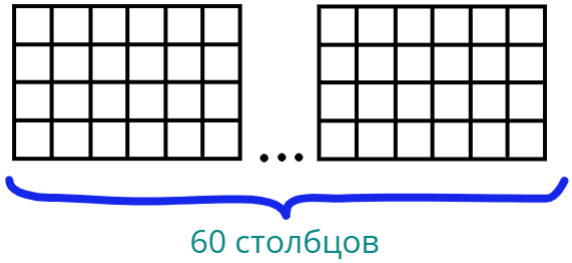


7.2. *Антон закрашивает какую-то ячейку в прямоугольнике* 4×70. *Затем он снова выбирает незакрашенную ячейку, соседствующую по стороне не более чем с одной уже закрашенной ячейкой, и так далее. Какое наибольшее число ячеек может быть закрашено?*



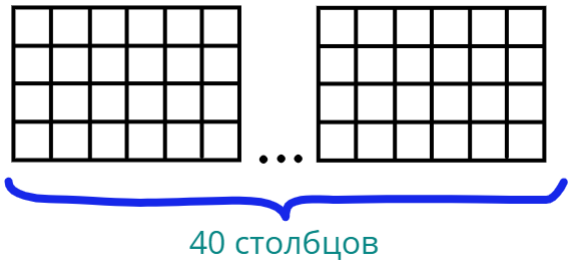
Ответ: 210

7.3. *Антон закрашивает какую-то ячейку в прямоугольнике* 4×60. *Затем он снова выбирает незакрашенную ячейку, соседствующую по стороне не более чем с одной уже закрашенной ячейкой, и так далее. Какое наибольшее число ячеек может быть закрашено?*



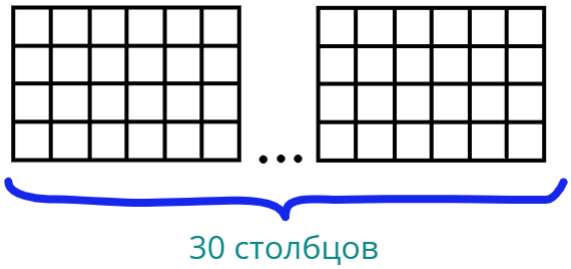
Ответ: 180

7.4. *Антон закрашивает какую-то ячейку в прямоугольнике* 4×40. *Затем он снова выбирает незакрашенную ячейку, соседствующую по стороне не более чем с одной уже закрашенной ячейкой, и так далее. Какое наибольшее число ячеек может быть закрашено?*



Ответ: 120

7.5. *Антон закрашивает какую-то ячейку в прямоугольнике* 4×30. *Затем он снова выбирает незакрашенную ячейку, соседствующую по стороне не более чем с одной уже закрашенной ячейкой, и так далее. Какое наибольшее число ячеек может быть закрашено?*

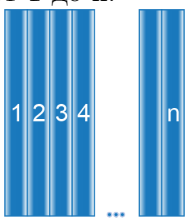


Ответ: 90

8.1. *На книжной полке у Федора стоят тома сочинений различных авторов. Когда приятель взял у него почитать два тома Пушкина, Федор заметил, что из оставшихся он прочитал целиком не менее половины книг. После того, как приятель вернул два тома Пушкина и взял почитать два тома Лермонтова, Федор понял, что из оставшихся он целиком прочитал менее одной трети томов. Какое наибольшее число томов могло находиться на полке у Федора?*

Ответ: 12

Решение. Пронумеруем все книги Федора от 1 до n.



Пусть первые два тома - тома Пушкина, s_1 - число прочитанных из них Федором; последние два - тома Лермонтова, s_2 - число прочитанных из них Федором. S - число прочитанных томов среди книг с 3й по $n-2$.

Согласно условию,

$S + s_2 \geqslant \frac{n-2}{2}$, $S + s_1 < \frac{n-2}{3}$,

$3S + 3s_1 < n - 2 \leqslant 2S + 2s_2$,

$3S + 3s_1 < 2S + 2s_2$,

$S < 2s_2 - 3s_1 \leqslant 4$,

Значит, S не превосходит 3. Тогда наибольшее возможное $S = 3$. Отсюда $n \leqslant 12$. Пример на 12 (1 - прочитал, 0 - не прочитал): 001110000011.

8.2. *На книжной полке у Федора стоят тома сочинений различных авторов. Когда приятель взял у него почитать три тома Пушкина, Федор заметил, что из оставшихся он прочитал целиком не менее половины книг. После того, как приятель вернул три тома Пушкина и взял почитать три тома Лермонтова, Федор понял, что из оставшихся он целиком прочитал менее одной трети томов. Какое наибольшее число томов могло находиться на полке у Федора?*

Ответ: 19

8.3. *На книжной полке у Федора стоят тома сочинений различных авторов. Когда приятель взял у него почитать три тома Пушкина, Федор заметил, что из оставшихся он прочитал целиком более половины книг. После того, как приятель вернул три тома Пушкина и взял почитать три тома Лермонтова, Федор понял, что из оставшихся он целиком прочитал не более одной трети томов. Какое наибольшее число томов могло находиться на полке у Федора?*

Ответ: 18

8.4. *На книжной полке у Федора стоят тома сочинений различных авторов. Когда приятель взял у него почитать два тома Пушкина, Федор заметил, что из оставшихся он прочитал целиком более половины книг. После того, как приятель вернул два тома Пушкина и взял почитать два тома Лермонтова, Федор понял, что из оставшихся он целиком прочитал не более одной трети томов. Какое наибольшее число томов могло находиться на полке у Федора?*

Ответ: 11

8.5. *На книжной полке у Федора стоят тома сочинений различных авторов. Когда приятель взял у него почитать два тома Пушкина, Федор заметил, что из оставшихся он прочитал целиком не менее трети книг. После того, как приятель вернул два тома Пушкина и взял почитать два тома Лермонтова, Федор понял, что из оставшихся он целиком прочитал менее одной четверти томов. Какое наибольшее число томов могло находиться на полке у Федора?*

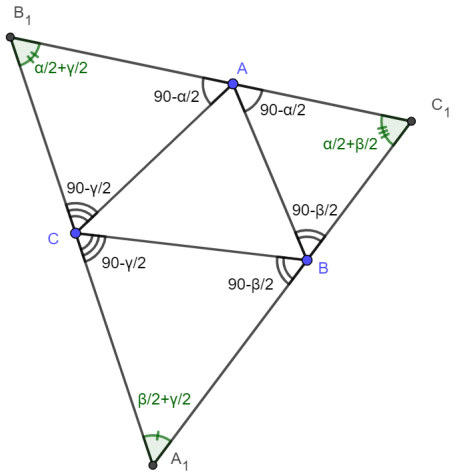
Ответ: 23

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 8 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, в котором есть углы 42 и 59 градусов, попарно пересеклись и образовали новый треугольник. Найдите градусную меру его наибольшего угла.*

Ответ: 69

Решение. Обозначим вершины данного в условии треугольника за A, B, C, а его углы за α, β и γ, соответственно. Кроме того, пусть A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения биссектрис внешних углов B и C, A и C, A и B, соответственно. Тогда $\angle B_1AC = \angle C_1AB = (180^\circ - \alpha)/2 = 90^\circ - \alpha/2$. Аналогично $\angle B_1CA = 90^\circ - \gamma/2$. Тогда из суммы углов треугольника B_1AC находим $\angle AB_1C = 180^\circ - (90^\circ - \alpha/2) - (90^\circ - \gamma/2) = \alpha/2 + \gamma/2$. Следовательно, углы треугольника $A_1B_1C_1$ — это полусуммы углов треугольника ABC. Очевидно, чтобы получить наибольший угол треугольника $A_1B_1C_1$, надо взять полусумму двух наибольших углов треугольника ABC. Углы ABC равны 42°, 59° и 79°, поэтому наибольшая полусумма равна 69°.



1.2. *Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, в котором есть углы 55 и 46 градусов, попарно пересеклись и образовали новый треугольник. Найдите градусную меру его наибольшего угла.*

Ответ: 67

1.3. *Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, в котором есть углы 36 и 63 градусов, попарно пересеклись и образовали новый треугольник. Найдите градусную меру его наибольшего угла.*

Ответ: 72

1.4. *Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, в котором есть углы 71 и 40 градусов, попарно пересеклись и образовали новый треугольник. Найдите градусную меру его наибольшего угла.*

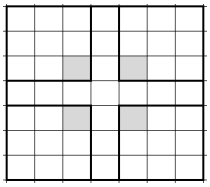
Ответ: 70

1.5. *Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, в котором есть углы 52 и 69 градусов, попарно пересеклись и образовали новый треугольник. Найдите градусную меру его наибольшего угла.*

Ответ: 64

2.1. *При каком наибольшем k можно утверждать, что при любой покраске в чёрный цвет k клеток белого квадрата 7×7 обязательно останется целиком белый квадрат 3×3 со сторонами, идущими по линиям сетки?*

Ответ: 3



Решение. Выделим четыре квадрата 3×3, примыкающие к углам квадрата 7×7. Эти квадраты не пересекаются, поэтому если закрашено не более трех клеток, то хотя бы один из этих квадратов остался целиком белым. Если же мы закрасим 4 клетки, отмеченные на рисунке серым, то ни одного белого квадрата 3×3 не останется.

2.2. *При каком наибольшем k можно утверждать, что при любой покраске в чёрный цвет k клеток белого прямоугольника 7×13 обязательно останется целиком белый квадрат 4×4 со сторонами, идущими по линиям сетки?*

Ответ: 2

2.3. *При каком наибольшем k можно утверждать, что при любой покраске в чёрный цвет k клеток белого прямоугольника 10×10 обязательно останется целиком белый квадрат 3×3 со сторонами, идущими по линиям сетки?*

Ответ: *8*

2.4. *При каком наибольшем k можно утверждать, что при любой покраске в чёрный цвет k клеток белого прямоугольника 7×10 обязательно останется целиком белый квадрат 3×3 со сторонами, идущими по линиям сетки?*

Ответ: 5

2.5. *При каком наибольшем k можно утверждать, что при любой покраске в чёрный цвет k клеток белого прямоугольника 8×18 обязательно останется целиком белый квадрат 4×4 со сторонами, идущими по линиям сетки?*

Ответ: 7

3.1. *Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через час пешеход находился от велосипедиста в 3 раза дальше, чем от пункта A. Еще через 30 мин произошла их встреча, после которой оба продолжили путь. Сколько часов занял путь пешехода от A до B?*

Ответ: 9

Решение. Пусть расстояние от A до B равно 1 км, пешеход двигается со скорость x км/ч, велосипедист — y км/ч. Тогда за час пешеход прошел x км, велосипедист проехал y км, и расстояние между ними равно $1-x-y$, что должно быть в 3 раза больше x. Следовательно, $3x = 1-x-y$, $y = 1-4x$. За следующие полчаса они вместе преодолеют $1-x-y$ км. Так как скорость их сближения равна $x+y$, получаем уравнение $\frac{1}{2}(x+y) = 1-x-y$, откуда $x+y = \frac{2}{3}$. Подставляем в последнее уравнение $y = 1-4x$: $1-3x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{9}$. Следовательно, пешеходу потребуется 9 часов, чтобы преодолеть расстояние от A до B.

3.2. *Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через час пешеход находился от велосипедиста в 6 раза дальше, чем от пункта A. Еще через 1 час 30 мин произошла их встреча, после которой оба продолжили путь. Сколько часов занял путь пешехода от A до B?*

Ответ: 10

3.3. *Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через 2 часа пешеход находился от велосипедиста в 3 раза дальше, чем от пункта A. Еще через час произошла их встреча, после которой оба продолжили путь. Сколько часов занял путь пешехода от A до B?*

Ответ: 18

3.4. *Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через 2 часа пешеход находился от велосипедиста в 5 раз дальше, чем от пункта A. Еще через два часа произошла их встреча, после которой оба продолжили путь. Сколько часов занял путь велосипедиста от B до A?*

Ответ: 5

3.5. *Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через час пешеход находился от велосипедиста в 4 раза дальше, чем от пункта A. Еще через 40 мин произошла их встреча, после которой оба продолжили путь. Сколько часов занял путь велосипедиста от B до A?*

Ответ: 2

4.1. *Петя написал на доске натуральное число A. Если его умножить на 8, то получится квадрат натурального числа. А сколько существует таких трёхзначных чисел B, для которых $A \cdot B$ тоже является квадратом натурального числа?*

Ответ: 15

Решение. Если $8A$ — квадрат натурального числа, то любое простое число, большее 2, входит в A в четной степени, а двойка — в нечетной. Значит и в B любое простое число, большее 2, должно входить в четной степени, а двойка — в нечетной, то есть B должно иметь вид $2x^2$. Следовательно, нам надо найти количество таких x, что $2x^2$ — трехзначное. Другими словами, $1000 > 2x^2 \geqslant 100$, $500 > x^2 \geqslant 50$. Подойдут x от 8 до 22, их $22 - 7 = 15$.

4.2. *Петя написал на доске натуральное число A. Если его умножить на 27, то получится квадрат натурального числа. А сколько существует таких трёхзначных чисел B, для которых $A \cdot B$ тоже является квадратом натурального числа?*

Ответ: 13

4.3. *Петя написал на доске натуральное число A. Если его умножить на 5, то получится квадрат натурального числа. А сколько существует таких трёхзначных чисел B, для которых $A \cdot B$ тоже является квадратом натурального числа?*

Ответ: 10

4.4. *Петя написал на доске натуральное число A. Если его умножить на 12, то получится квадрат натурального числа. А сколько существует таких натуральных чисел $1000 \leqslant B \leqslant 2000$, для которых $A \cdot B$ тоже является квадратом натурального числа?*

Ответ: 7

4.5. *Петя написал на доске натуральное число A. Если его умножить на 14, то получится квадрат натурального числа. А сколько существует таких трёхзначных чисел B, для которых $A \cdot B$ тоже является квадратом натурального числа?*

Ответ: 6

5.1. *Сколько существует шестизначных чисел, состоящих только из цифр 1 и 2, если известно, что каждая из них встречается?*

Ответ: 62

Решение. Всего существует $64 = 2^6$ шестизначных числа, состоящих из цифр 1 и 2, так как есть 6 позиций и на каждую из них по два варианта поставить цифру. Но два числа — состоящее только из единиц и состоящее только из двоек — не удовлетворяют условию, поэтому остается 62 числа.

5.2. *Сколько существует пятизначных чисел, состоящих только из цифр 5 и 6, если известно, что каждая из них встречается?*

Ответ: 30

5.3. *Сколько существует семизначных чисел, состоящих только из цифр 3 и 8, если известно, что каждая из них встречается?*

Ответ: 126

5.4. *Сколько существует шестизначных чисел, состоящих только из цифр 7 и 8, причём 8 обязательно встречается?*

Ответ: 63

5.5. *Сколько существует семизначных чисел, состоящих только из цифр 8 и 9, причём 8 обязательно встречается?*

Ответ: 127

6.1. *Монеты бывают номиналов 50 копеек, 1 рубль, 2 рубля, 5 рублей, 10 рублей. В кошельке лежит несколько монет. Известно, что какие бы 20 монет ни вытащить из кошелька, среди них будет хотя бы одна рублёвая, хотя бы одна двухрублёвая и хотя бы одна пятирублёвая. При каком наибольшем количестве монет в кошельке такое возможно?*

Ответ: 28

Решение. Пример: 9 монет по 1 рублю, 9 монет по 2 рубля, 9 монет по 5 рублей и 1 монета по 10 рублей. Заметим, что в кошельке всего 9+9+1=19 монет достоинством не 1 рубль, поэтому среди любых 20 монет обязательно встретится рублевая. Аналогично проверяется и про все остальные номиналы.

Оценка: Предположим, что в кошельке лежит x монет. Так как монет достоинством не 1 рубль не больше 19 (иначе нашлось бы 20 монет, не содержащих рублевую), рублевых монет должно быть не менее $x - 19$. Аналогично двухрублевых и пятирублевых. Следовательно, всего монет не менее $3(x - 19)$. Получаем неравенство $x \geqslant 3x - 57$, откуда $57 \geqslant 2x$, $28,5 \geqslant x$. Так как x — целое, оно не превосходит 28.

6.2. *Монеты бывают номиналов 50 копеек, 1 рубль, 2 рубля, 5 рублей, 10 рублей. В кошельке лежит несколько монет. Известно, что какие бы 30 монет ни вытащить из кошелька, среди них будет хотя бы одна двухрублёвая, хотя бы одна пятирублёвая и хотя бы одна десятирублёвая. При каком наибольшем количестве монет в кошельке такое возможно?*

Ответ: 43

6.3. *Монеты бывают номиналов 50 копеек, 1 рубль, 2 рубля, 5 рублей, 10 рублей. В кошельке лежит несколько монет. Известно, что какие бы 26 монет ни вытащить из кошелька, среди них будет хотя бы одна рублёвая, хотя бы одна пятирублёвая и хотя бы одна десятирублёвая. При каком наибольшем количестве монет в кошельке такое возможно?*

Ответ: 37

6.4. *Монеты бывают номиналов 50 копеек, 1 рубль, 2 рубля, 5 рублей, 10 рублей. В кошельке лежит несколько монет. Известно, что какие бы 28 монет ни вытащить из кошелька, среди них будет хотя бы одна рублёвая, хотя бы одна двухрублёвая и хотя бы одна десятирублёвая. При каком наибольшем количестве монет в кошельке такое возможно?*

Ответ: 40

6.5. *Монеты бывают номиналов 50 копеек, 1 рубль, 2 рубля, 5 рублей, 10 рублей. В кошельке лежит несколько монет. Известно, что какие бы 24 монеты ни вытащить из кошелька, среди них будет хотя бы одна рублёвая, хотя бы одна двухрублёвая и хотя бы одна пятирублёвая. При каком наибольшем количестве монет в кошельке такое возможно?*

Ответ: 34

7.1. *В футбольном турнире участвовали 20 команд. Каждая сыграла один матч с каждой. За победу команда получает 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. После окончания турнира Вася посчитал сумму очков, набранных командами. Получилось 500. Какое количество матчей завершилось вничью?*

Ответ: 70

Решение. Каждая команда сыграла 19 матчей, поэтому всего матчей было сыграно $20 \cdot 19/2 = 190$ (делим пополам, так как каждый матч посчитан дважды). Если бы ничьих не было, то сумма очков была бы равна $3 \cdot 190 = 570$. Каждый ничейный матч приносит в сумму на одно очко меньше, чем матч, закончившийся победой одной из команд (сумма набранных очков равна 2, а не 3). Так как нам надо уменьшить сумму на 70 очков, ничейных матчей должно быть 70.

7.2. *В футбольном турнире участвовали 20 команд. Каждая сыграла один матч с каждой. За победу команда получает 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. После окончания турнира Вася посчитал сумму очков, набранных командами. Получилось 400. Какое количество матчей завершилось победой одной из команд?*

Ответ: 20

7.3. *В футбольном турнире участвовали 25 команд. Каждая сыграла один матч с каждой. За победу команда получает 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. После окончания турнира Вася посчитал сумму очков, набранных командами. Получилось 740. Какое количество матчей завершилось вничью?*

Ответ: 160

7.4. *В футбольном турнире участвовали 40 команд. Каждая сыграла один матч с каждой. За победу команда получает 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. После окончания турнира Вася посчитал сумму очков, набранных командами. Получилось 1800. Какое количество матчей завершилось вничью?*

Ответ: 540

7.5. *В футбольном турнире участвовали 40 команд. Каждая сыграла один матч с каждой. За победу команда получает 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. После окончания турнира Вася посчитал сумму очков, набранных командами. Получилось 2000. Какое количество матчей завершилось вничью?*

Ответ: 340

8.1. *Действительное число a таково, что $2a - 1/a = 3$. Чему равно $16a^4 + 1/a^4$?*

Ответ: 161

Решение. Возведя равенство из условия в квадрат, получим $4a^2 - 4 + 1/a^2 = 9$, то есть $4a^2 + 1/a^2 = 13$. Ещё раз возводим в квадрат и получаем $16a^4 + 8 + 1/a^4 = 169$. Следовательно, $16a^4 + 1/a^4 = 161$.

8.2. *Действительное число b таково, что $b - 2/b = 5$. Чему равно $b^4 + 16/b^4$?*

Ответ: 833

8.3. *Действительное число x таково, что $3x - 1/x = 3$. Чему равно $81x^4 + 1/x^4$?*

Ответ: 207

8.4. *Действительное число y таково, что $y - 3/y = 5$. Чему равно $y^4 + 81/y^4$?*

Ответ: 943

8.5. *Действительное число z таково, что $2z - 1/z = 4$. Чему равно $16z^4 + 1/z^4$?*

Ответ: 392

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 9 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *Первое января некоторого невисокосного года выпало на субботу. А сколько в этом году пятниц?*

Ответ: 52

Решение. В невисокосном году 365 дней. Первые два дня выпали на субботу и воскресенье, далее идёт 51 полная неделя ($51 \cdot 7 = 357$ дней) и ещё 6 дней. Итого, 52 пятницы.

1.2. *Первое января некоторого високосного года выпало на субботу. А сколько в этом году воскресений?*

Ответ: 53

1.3. *Первое января некоторого невисокосного года выпало на понедельник. А сколько в этом году пятниц?*

Ответ: 52

1.4. *Первое января некоторого невисокосного года выпало на четверг. А сколько в этом году понедельников?*

Ответ: 52

1.5. *Первое января некоторого високосного года выпало на вторник. А сколько в этом году четвергов?*

Ответ: 52

2.1. *Лиза написала квадратное уравнение. Артём стёр у него свободный член, из-за этого уравнение теперь выглядит вот так* $2x^2 + 20x + ... = 0$. *Лиза не помнит, какое число стёр Артём, но помнит, что уравнение имеет ровно один действительный корень. Чему равен этот корень?*

Ответ: -5

Решение. Квадратное уравнение имеет один корень тогда и только тогда, когда его дискриминант равен 0. А если дискриминант равен 0, то корень вычисляется по формуле $x_1 = -b/(2a) = -20/4 = -5$.

2.2. *Лиза написала квадратное уравнение. Артём стёр у него свободный член, из-за этого уравнение теперь выглядит вот так* $3x^2 - 18x + ... = 0$. *Лиза не помнит, какое число стёр Артём, но помнит, что уравнение имеет ровно один действительный корень. Чему равен этот корень?*

Ответ: 3

2.3. *Лиза написала квадратное уравнение. Артём стёр у него свободный член, из-за этого уравнение теперь выглядит вот так* $2x^2 - 24x + ... = 0$. *Лиза не помнит, какое число стёр Артём, но помнит, что уравнение имеет ровно один действительный корень. Чему равен этот корень?*

Ответ: 6

2.4. *Лиза написала квадратное уравнение. Артём стёр у него свободный член, из-за этого уравнение теперь выглядит вот так* $3x^2 + 24x + ... = 0$. *Лиза не помнит, какое число стёр Артём, но помнит, что уравнение имеет ровно один действительный корень. Чему равен этот корень?*

Ответ: -4

2.5. *Лиза написала квадратное уравнение. Артём стёр у него свободный член, из-за этого уравнение теперь выглядит вот так* $5x^2 + 20x + ... = 0$. *Лиза не помнит, какое число стёр Артём, но помнит, что уравнение имеет ровно один действительный корень. Чему равен этот корень?*

Ответ: -2

3.1. *Лиза нарисовала графики всех функций вида $y = ax+b$, где a и b принимают все натуральные значения от 1 до 100. Сколько из этих графиков проходят через точку $(3, 333)$?*

Ответ: 23

Решение. Мы ищем такие a и b, что $333 = 3a + b$. То есть $b = 3(111 - a)$. Следовательно, $0 < 111 - a \leqslant 33$, $78 \leqslant a$. Таких a ровно 23 и для каждого из них единственным образом подбирается b.

3.2. *Лиза нарисовала графики всех функций вида $y = ax+b$, где a и b принимают все натуральные значения от 1 до 100. Сколько из этих графиков проходят через точку $(7, 707)$?*

Ответ: 14

3.3. *Лиза нарисовала графики всех функций вида $y = ax+b$, где a и b принимают все натуральные значения от 1 до 100. Сколько из этих графиков проходят через точку $(4, 444)$?*

Ответ: 15

3.4. *Лиза нарисовала графики всех функций вида $y = ax+b$, где a и b принимают все натуральные значения от 1 до 200. Сколько из этих графиков проходят через точку $(3, 666)$?*

Ответ: 45

3.5. *Лиза нарисовала графики всех функций вида $y = ax+b$, где a и b принимают все натуральные значения от 1 до 200. Сколько из этих графиков проходят через точку $(4, 808)$?*

Ответ: 49

4.1. *Море включает в себя залив с более соленой водой. Солёность воды в море 120 промилле, в заливе 240 промилле, в части моря, не включающей залив - 110 промилле. Во сколько раз объём воды в море больше объёма воды в заливе? Объём воды считается, включая объём соли. Промилле - тысячная часть числа; соленость определяется как отношение объема соли к общему объему смеси*

Ответ: 13

Решение. Пусть в заливе объём соли s_1, а объём воды v_1; в части моря, не включающей залив, объём соли s_2, а весь её объём v_2. Имеем уравнения

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{240}{1000}; \qquad \frac{s_2}{v_2} = \frac{110}{1000}; \qquad \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{120}{1000}.$$

Таким образом, $120(v_1+v_2) = 1000(s_1+s_2) = 240v_1+110v_2$, откуда $120v_1 = 10v_2$, $12v_1 = v_2$. Нам требуется найти отношение $(v_1 + v_2)/v_1$. Оно равно 13.

4.2. *Море включает в себя залив с более соленой водой. Солёность воды в море 150 промилле, в заливе 270 промилле, в части моря, не включающей залив - 120 промилле. Во сколько раз объём воды в море больше объёма воды в заливе? Объём воды считается, включая объём соли. Промилле - тысячная часть числа; соленость определяется как отношение объема соли к общему объему смеси*

Ответ: 5

4.3. *Море включает в себя залив с более соленой водой. Солёность воды в море 160 промилле, в заливе 280 промилле, в части моря, не включающей залив - 100 промилле. Во сколько раз объём воды в море больше объёма воды в заливе? Объём воды считается, включая объём соли. Промилле - тысячная часть числа; соленость определяется как отношение объема соли к общему объему смеси*

Ответ: 3

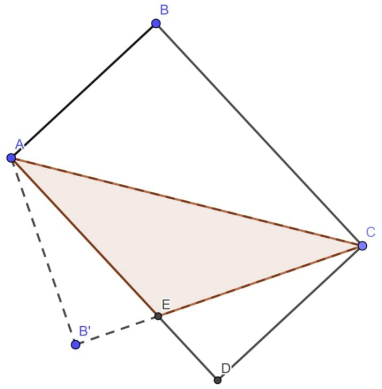
4.4. *Море включает в себя залив с более соленой водой. Солёность воды в море 130 промилле, в заливе 250 промилле, в части моря, не включающей залив - 110 промилле. Во сколько раз объём воды в море больше объёма воды в заливе? Объём воды считается, включая объём соли. Промилле - тысячная часть числа; соленость определяется как отношение объема соли к общему объему смеси*

Ответ: 7

4.5. *Море включает в себя залив с более соленой водой. Солёность воды в море 140 промилле, в заливе 420 промилле, в части моря, не включающей залив - 100 промилле. Во сколько раз объём воды в море больше объёма воды в заливе? Объём воды считается, включая объём соли. Промилле - тысячная часть числа; соленость определяется как отношение объема соли к общему объему смеси*

Ответ: 8

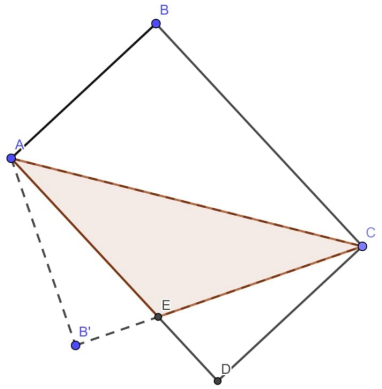
5.1. *Бумажный прямоугольник* 4×8 *сложили по диагонали как показано на рисунке. Чему равна площадь треугольника, покрытого дважды?*



Ответ: 10.

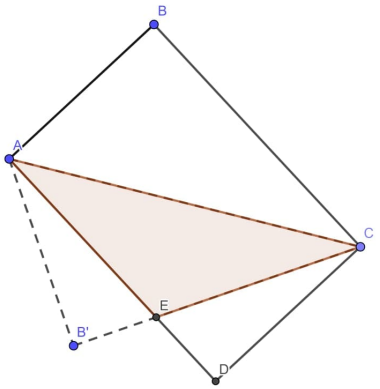
Решение. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4\sqrt{5}$. Треугольник AEC — равнобедренный, и если опустить в нём высоту EH, то треугольник AEH будет подобен треугольнику ACD. Следовательно, $AH/EH = AD/DC = 2$. $AH = 2\sqrt{5}$, так как высота в равнобедренном треугольнике является медианой. Значит, $EH = \sqrt{5}$, $S(AEC) = \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}/2 = 10$.

5.2. *Бумажный прямоугольник* 6×18 *сложили по диагонали как показано на рисунке. Чему равна площадь треугольника, покрытого дважды?*



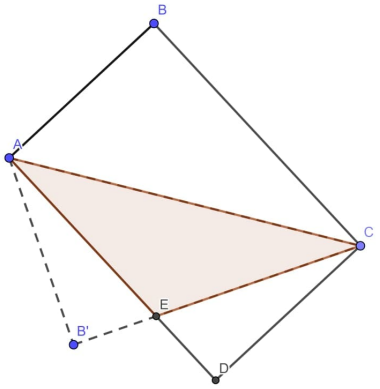
Ответ: 30.

5.3. *Бумажный прямоугольник* 12×24 *сложили по диагонали как показано на рисунке. Чему равна площадь треугольника, покрытого дважды?*



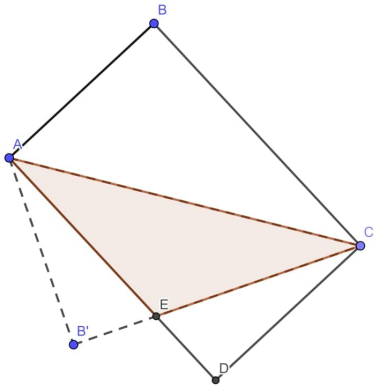
Ответ: 90.

5.4. *Бумажный прямоугольник* 12×36 *сложили по диагонали как показано на рисунке. Чему равна площадь треугольника, покрытого дважды?*



Ответ: 120.

5.5. *Бумажный прямоугольник* 8×16 *сложили по диагонали как показано на рисунке. Чему равна площадь треугольника, покрытого дважды?*



Ответ: 40.

6.1. *В кружке 9 человек. Каждый день какие-то трое из них вместе ходили в кафе, а остальные в кафе не ходили. После 360 дней оказалось, что любые два человека из кружка были вместе в кафе одно и то же число раз. Какое?*

Ответ: 30

Решение. Всего пар человек в кружке $9 \cdot 8/2 = 36$. За 360 дней в кафе побывало $360 \cdot 3$ пар (так как каждый день прибавляется по три пары). Так как все пары побывали одинаковое количество раз, это количество равно $360 \cdot 3/36 = 30$.

6.2. *В кружке 10 человек. Каждый день какие-то трое из них вместе ходили в кафе, а остальные в кафе не ходили. После 360 дней оказалось, что любые два человека из кружка были вместе в кафе одно и то же число раз. Какое?*

Ответ: 24

6.3. *В кружке 8 человек. Каждый день какие-то трое из них вместе ходили в кафе, а остальные в кафе не ходили. После 560 дней оказалось, что любые два человека из кружка были вместе в кафе одно и то же число раз. Какое?*

Ответ: 60

6.4. *В кружке 11 человек. Каждый день какие-то трое из них вместе ходили в кафе, а остальные в кафе не ходили. После 330 дней оказалось, что любые два человека из кружка были вместе в кафе одно и то же число раз. Какое?*

Ответ: 18

6.5. *В кружке 12 человек. Каждый день какие-то трое из них вместе ходили в кафе, а остальные в кафе не ходили. После 396 дней оказалось, что любые два человека из кружка были вместе в кафе одно и то же число раз. Какое?*

Ответ: 18

7.1. *Действительные x, y, z таковы, что $xy + xz + yz + x + y + z = -3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 5$. Чему равно $x + y + z$?*

Ответ: -1

Решение. Сложим удвоенное первое равенство со вторым, получим $(x + y + z)^2 + 2(x + y + z) = -1$. Следовательно, $(x + y + z + 1)^2 = 0$, $x + y + z = -1$.

7.2. *Действительные x, y, z таковы, что $xy + xz + yz + 3x + 3y + 3z = -7$, $x^2 + y^2 + z^2 = 5$. Чему равно $x + y + z$?*

Ответ: -3

7.3. *Действительные x, y, z таковы, что $xy + xz + yz - 2x - 2y - 2z = -4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Чему равно $x + y + z$?*

Ответ: 2

7.4. *Действительные x, y, z таковы, что $xy + xz + yz + 2x + 2y + 2z = -5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Чему равно $x + y + z$?*

Ответ: -2

7.5. *Действительные x, y, z таковы, что $xy + xz + yz - x - y - z = -4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 7$. Чему равно $x + y + z$?*

Ответ: 1

8.1. *Из всех чисел с суммой цифр 25 найдите то, произведение цифр которого максимально. Если таких чисел несколько, напишите в ответ наименьшее из них.*

Ответ: 33333334

Решение. Очевидно, в числе нет 0. Если в числе есть цифра 1, то её можно убрать и увеличить какую-нибудь из оставшихся цифр на 1, от этого сумма не изменится, а произведение увеличится. Если в числе есть цифра $x \geqslant 5$, то её можно заменить на цифры 2 и $x-2$, и произведение увеличится: $2(x-2) > x$ при $x > 4$. Наконец, если в числе хотя бы три двойки или двойка и четверка, то их можно заменить на две тройки. Если в числе хотя бы две четверки, то их можно заменить на 3, 3 и 2. Таким образом, в числе с максимальным произведением помимо троек может быть или не более одной четверки, или не более двух двоек. Это возможно только если в числе 7 троек и либо одна четверка, либо две двойки (в обоих случаях произведения одинаковы). Наименьшим из полученных чисел является 33333334.

8.2. *Из всех чисел с суммой цифр 25 найдите то, произведение цифр которого максимально. Если таких чисел несколько, напишите в ответ наибольшее из них.*

Ответ: 333333322

8.3. *Из всех чисел с суммой цифр 28 найдите то, произведение цифр которого максимально. Если таких чисел несколько, напишите в ответ наименьшее из них.*

Ответ: 333333334

8.4. *Из всех чисел с суммой цифр 28 найдите то, произведение цифр которого максимально. Если таких чисел несколько, напишите в ответ наибольшее из них.*

Ответ: 3333333322

8.5. *Из всех чисел с суммой цифр 26 найдите то, произведение цифр которого максимально. Если таких чисел несколько, напишите в ответ наименьшее из них.*

Ответ: 233333333

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 10 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *По кругу с постоянными скоростями ездят на велосипедах Петя и Вася. Скорость Пети равна 8 км/ч, а скорость Васи – 10 км/ч. Вначале они ехали в разные стороны (Петя – по часовой стрелке, а Вася – против), а затем Петя изменил направление движения (начал двигаться против часовой стрелки) и одновременно увеличил свою скорость вдвое. После этого велосипедисты стали встречаться в k раз реже. Найдите k.*

Ответ: 3

Решение. Пусть d км — длина окружности. Тогда вначале время между двумя последовательными встречами велосипедистов равно $t_1 = d/(8 + 10) = d/18$ ч. Затем скорость Пети стала равной 16 км/ч и велосипедисты стали двигаться в одну сторону, поэтому время между двумя последовательными встречами велосипедистов стало равно $t_2 = d/(16 - 10) = d/6$ ч. Отсюда следует, что частота встреч уменьшилась в $t_2/t_1 = 3$ раза.

1.2. *По кругу с постоянными скоростями ездят на велосипедах Петя и Вася. Скорость Пети равна 18 км/ч, а скорость Васи – 14 км/ч. Вначале они ехали по часовой стрелке, а затем Петя изменил направление движения (начал двигаться против часовой стрелки) и одновременно уменьшил свою скорость втрое. После этого велосипедисты стали встречаться в k раз чаще. Найдите k.*

Ответ: 5

1.3. *По кругу с постоянными скоростями ездят на велосипедах Петя и Вася. Скорость Пети равна 8 км/ч, а скорость Васи – 18 км/ч. Вначале они ехали в разные стороны (Петя – по часовой стрелке, а Вася – против), а затем Петя изменил направление движения (начал двигаться против часовой стрелки) и одновременно увеличил свою скорость вдвое. После этого велосипедисты стали встречаться в k раз реже. Найдите k.*

Ответ: 13

1.4. *По кругу с постоянными скоростями ездят на велосипедах Петя и Вася. Скорость Пети равна 12 км/ч, а скорость Васи – 14 км/ч. Вначале они ехали по часовой стрелке, а затем Петя изменил направление движения (начал двигаться против часовой стрелки) и одновременно уменьшил свою скорость вдвое. После этого велосипедисты стали встречаться в k раз чаще. Найдите k.*

Ответ: 10

1.5. *По кругу с постоянными скоростями ездят на велосипедах Петя и Вася. Скорость Пети равна 7 км/ч, а скорость Васи – 17 км/ч. Вначале они ехали в разные стороны (Петя – по часовой стрелке, а Вася – против), а затем Петя изменил направление движения (начал двигаться против часовой стрелки) и одновременно увеличил свою скорость втрое. После этого велосипедисты стали встречаться в k раз реже. Найдите k.*

Ответ: 6

2.1. *Саша решил квадратное уравнение* $3x^2 + bx + c = 0$ *(где* b *и* c *— некоторые действительные числа). В ответе у него получился ровно один корень:* $x = -4$*. Найдите* b*.*

Ответ: 24

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -b/3$. В нашем случае $x_1 = x_2 = -4$, откуда $-b/3 = -8$ и $b = 24$.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что уравнение должно приводиться к полному квадрату $3(x + 4)^2 = 0$.

2.2. *Саша решил квадратное уравнение* $2x^2 + bx + c = 0$ *(где* b *и* c *— некоторые действительные числа). В ответе у него получился ровно один корень:* $x = -4$*. Найдите* b*.*

Ответ: 16

2.3. *Саша решил квадратное уравнение* $5x^2 + bx + c = 0$ *(где* b *и* c *— некоторые действительные числа). В ответе у него получился ровно один корень:* $x = -2$*. Найдите* b*.*

Ответ: 20

2.4. *Саша решил квадратное уравнение* $3x^2 + bx + c = 0$ *(где* b *и* c *— некоторые действительные числа). В ответе у него получился ровно один корень:* $x = -3$*. Найдите* b*.*

Ответ: 18

2.5. *Саша решил квадратное уравнение* $2x^2 + bx + c = 0$ *(где* b *и* c *— некоторые действительные числа). В ответе у него получился ровно один корень:* $x = -3$*. Найдите* b*.*

Ответ: 12

3.1. *Найдите сумму*

$$\sqrt[7]{(-7)^7} + \sqrt[8]{(-8)^8} + \sqrt[9]{(-9)^9} + \ldots + \sqrt[100]{(-100)^{100}}.$$

(Каждое слагаемое — вида $\sqrt[k]{(-k)^k}$*).*

Ответ: 47

Решение. Заметим, что $\sqrt[k]{(-k)^k}$ при четном k равно k, а при нечетном k равно $-k$. Поэтому наша сумма равна $-7+8-9+10-\ldots-99+100 = (-7+8)+(-9+10)+\ldots+(-99+100)$. В последнем выражении 47 скобок, каждая из которых равна 1.

3.2. *Найдите сумму*

$$\sqrt[17]{(-17)^{17}} + \sqrt[18]{(-18)^{18}} + \sqrt[19]{(-19)^{19}} + \ldots + \sqrt[112]{(-112)^{112}}.$$

(Каждое слагаемое — вида $\sqrt[k]{(-k)^k}$*).*

Ответ: 48

3.3. *Найдите сумму*

$$\sqrt[15]{(-15)^{15}} + \sqrt[16]{(-16)^{16}} + \sqrt[17]{(-17)^{17}} + \ldots + \sqrt[104]{(-104)^{104}}.$$

(Каждое слагаемое — вида $\sqrt[k]{(-k)^k}$*).*

Ответ: 45

3.4. *Найдите сумму*

$$\sqrt[11]{(-11)^{11}} + \sqrt[12]{(-12)^{12}} + \sqrt[13]{(-13)^{13}} + \ldots + \sqrt[116]{(-116)^{116}}.$$

(Каждое слагаемое — вида $\sqrt[k]{(-k)^k}$*).*

Ответ: 53

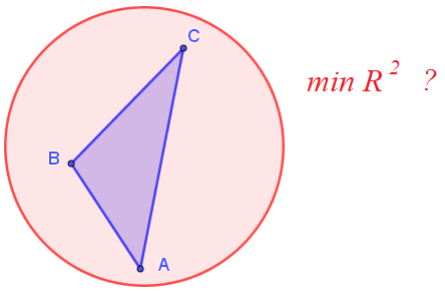
3.5. *Найдите сумму*

$$\sqrt[9]{(-9)^9} + \sqrt[10]{(-10)^{10}} + \sqrt[11]{(-11)^{11}} + \ldots + \sqrt[106]{(-106)^{106}}.$$

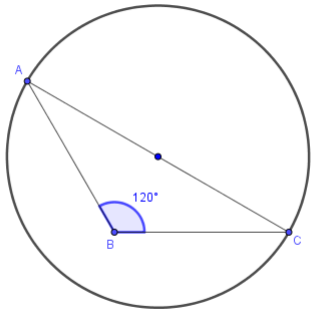
(Каждое слагаемое — вида $\sqrt[k]{(-k)^k}$*).*

Ответ: 49

4.1. *Про треугольник ABC известно следующее: $AB = 12$, $BC = 10$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R — радиус наименьшего круга, в который можно поместить этот треугольник.*



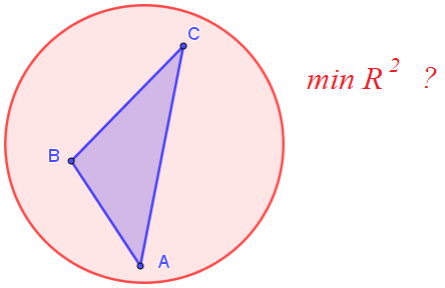
Ответ: 91



Решение. Так как отрезок AC помещается в круг, то $2R \geqslant AC$. С другой стороны, круг, построенный на AC как на диаметре, покрывает наш треугольник ABC, поскольку $\angle ABC > 90^\circ$. Таким образом, искомое значение R равно $AC/2$, и $R^2 = AC^2/4$.

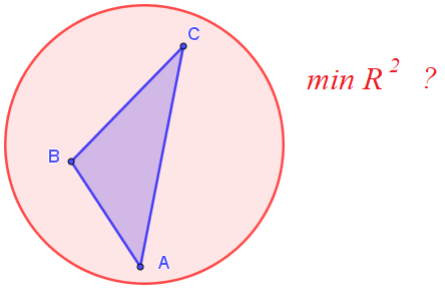
Далее, по теореме косинусов имеем $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 12^2 + 10^2 + 2 \cdot 12 \cdot 10/2 = 4(6^2 + 5^2 + 6 \cdot 5) = 4 \cdot 91$.

4.2. *Про треугольник ABC известно следующее: $AB = 8$, $BC = 16$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R — радиус наименьшего круга, в который можно поместить этот треугольник.*



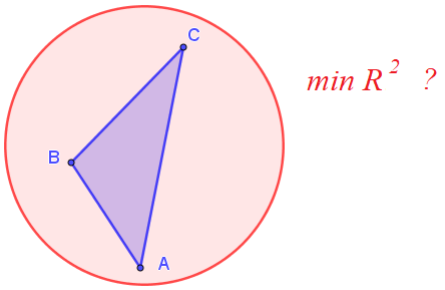
Ответ: 112

4.3. *Про треугольник ABC известно следующее: $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 8$, $\angle ABC = 150^\circ$. Найдите R^2, где R — радиус наименьшего круга, в который можно поместить этот треугольник.*



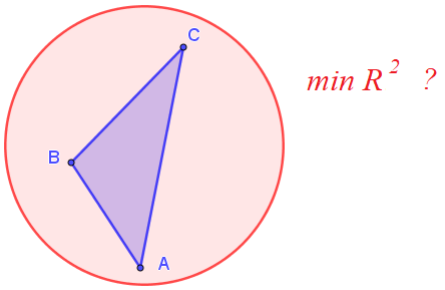
Ответ: 31

4.4. *Про треугольник ABC известно следующее: $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle ABC = 135°$. Найдите R^2, где R — радиус наименьшего круга, в который можно поместить этот треугольник.*



Ответ: 53

4.5. *Про треугольник ABC известно следующее: $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = 6$, $\angle ABC = 150°$. Найдите R^2, где R — радиус наименьшего круга, в который можно поместить этот треугольник.*



Ответ: 39

5.1. *Рассмотрим число 616. У него сумма цифр равна 13, а произведение цифр равно 36. А каково наибольшее натуральное число, у которого сумма цифр равна 13, а произведение цифр равно 36?*

Ответ: 3322111

Решение. В десятичной записи данного числа не может быть нулей. Выпишем все цифры данного числа, которые больше 1, их произведение по-прежнему равно 36. Так как 36 раскладывается на простые множители как $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, то возможные наборы цифр, больших 1, это: $\{2,2,3,3\}$, $\{2,2,9\}$, $\{2,3,6\}$, $\{3,3,4\}$, $\{4,9\}$, $\{6,6\}$. Так как сумма цифр равна 13, то количество единиц восстанавливается в каждом из случаев однозначно, в итоге возможные наборы цифр: $\{1,1,1,2,2,3,3\}$, $\{2,2,9\}$, $\{1,1,2,3,6\}$, $\{1,1,1,3,3,4\}$, $\{4,9\}$, $\{1,6,6\}$. Видим, что наибольшее число может быть семизначным, и это возможно только в первом случае. Остается заметить, что максимальное число с набором цифр $\{1,1,1,2,2,3,3\}$ — это число 3322111.

5.2. *Рассмотрим число 416. У него сумма цифр равна 11, а произведение цифр равно 24. А каково наибольшее натуральное число, у которого сумма цифр равна 11, а произведение цифр равно 24?*

Ответ: 322211

5.3. *Рассмотрим число 813. У него сумма цифр равна 12, а произведение цифр равно 24. А каково наибольшее натуральное число, у которого сумма цифр равна 12, а произведение цифр равно 24?*

Ответ: 3222111

5.4. *Рассмотрим число 6152. У него сумма цифр равна 14, а произведение цифр равно 60. А каково наибольшее натуральное число, у которого сумма цифр равна 14, а произведение цифр равно 60?*

Ответ: 532211

5.5. *Рассмотрим число 914. У него сумма цифр равна 14, а произведение цифр равно 36. А каково наибольшее натуральное число, у которого сумма цифр равна 14, а произведение цифр равно 36?*

Ответ: 33221111

6.1. *На плоскости отмечено 55 точек – вершины некоторого правильного 54-угольника и его центр. Петя хочет покрасить в красный цвет тройку отмеченных точек так, чтобы покрашенные точки являлись вершинами некоторого правильного треугольника. Сколькими способами Петя может это сделать?*

Ответ: 72

Решение. Считаем, что наш 54-угольник вписан в окружность, и его вершины делят эту окружность на 54 дуги длины 1.

Если одна из покрашенных точек — центр, то две другие покрашенные точки должны являться концами дуги величиной $54/6 = 9$. Таких возможностей — 54.

Иначе все три покрашенные вершины должны образовывать правильный треугольник, вершины которого делят окружность на 3 дуги величиной $54/3 = 18$. Таких возможностей — $54/3 = 18$.

Итого: $54 + 18 = 72$ варианта.

6.2. *На плоскости отмечена 61 точка – вершины некоторого правильного 60-угольника и его центр. Петя хочет покрасить в красный цвет тройку отмеченных точек так, чтобы покрашенные точки являлись вершинами некоторого правильного треугольника. Сколькими способами Петя может это сделать?*

Ответ: 80

6.3. *На плоскости отмечено 43 точки – вершины некоторого правильного 42-угольника и его центр. Петя хочет покрасить в красный цвет тройку отмеченных точек так, чтобы покрашенные точки являлись вершинами некоторого правильного треугольника. Сколькими способами Петя может это сделать?*

Ответ: 56

6.4. *На плоскости отмечено 67 точек – вершины некоторого правильного 66-угольника и его центр. Петя хочет покрасить в красный цвет тройку отмеченных точек так, чтобы покрашенные точки являлись вершинами некоторого правильного треугольника. Сколькими способами Петя может это сделать?*

Ответ: 88

6.5. *На плоскости отмечено 49 точек – вершины некоторого правильного 48-угольника и его центр. Петя хочет покрасить в красный цвет тройку отмеченных точек так, чтобы покрашенные точки являлись вершинами некоторого правильного треугольника. Сколькими способами Петя может это сделать?*

Ответ: 64

7.1. *В ряд записали числа:* 100^{100}, 101^{101}, 102^{102}, ..., 234^{234} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 100 до 234). Сколько среди выписанных чисел точных квадратов? (Точным квадратом называют квадрат целого числа.)*

Ответ: 71

Решение. Рассмотрим число вида m^k, где m и k — натуральные числа. Если k четно, то m^k — точный квадрат. Если же k нечетно, то m^k является точным квадратом тогда и только тогда, когда m является точным квадратом. Таким образом, ответ в нашей задаче — суммарное количество четных чисел и нечетных точных квадратов в множестве чисел $\{100, 101, 102, \ldots, 234\}$. Нужных четных чисел $(234 - 98)/2 = 68$. Нужных точных квадратов — ровно 3: $11^2, 13^2, 15^2$. Итого $68 + 3 = 71$ искомых чисел.

7.2. *В ряд записали числа:* 56^{56}, 57^{57}, 58^{58}, ..., 218^{218} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 56 до 218). Сколько среди выписанных чисел точных квадратов? (Точным квадратом называют квадрат целого числа.)*

Ответ: 85

7.3. *В ряд записали числа:* 74^{74}, 75^{75}, 76^{76}, ..., 243^{243} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 74 до 243). Сколько среди выписанных чисел точных квадратов? (Точным квадратом называют квадрат целого числа.)*

Ответ: 89

7.4. *В ряд записали числа:* 85^{85}, 86^{86}, 87^{87}, ..., 229^{229} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 85 до 229). Сколько среди выписанных чисел точных квадратов? (Точным квадратом называют квадрат целого числа.)*

Ответ: 75

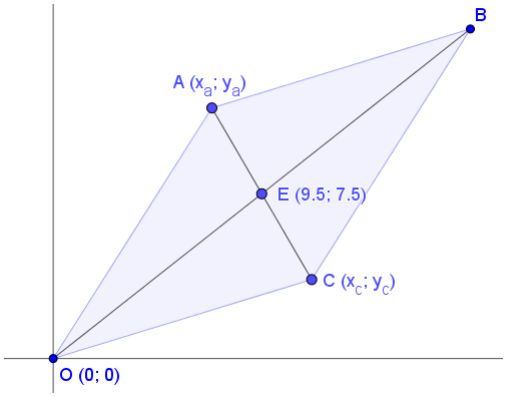
7.5. *В ряд записали числа:* 103^{103}, 104^{104}, 105^{105}, ..., 227^{227} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 103 до 227). Сколько среди выписанных чисел точных квадратов? (Точным квадратом называют квадрат целого числа.)*

Ответ: 65

8.1. *На координатной плоскости рисуют параллелограмм $OABC$, у которого центр находится в точке $\left(\frac{19}{2}, \frac{15}{2}\right)$, а точки A, B и C имеют натуральные координаты. Найдите количество таких параллелограммов. (Здесь через O обозначено начало координат - точка $(0,0)$; два параллелограмма с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. $OABC$ и $OCBA$ считаем одним и тем же параллелограммом.)*

Ответ: 126.

Решение. Заметим, что $OABC$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда точка $E\left(\frac{19}{2}, \frac{15}{2}\right)$ — середина отрезков OB и AC, и кроме того, точки O, A, B, C не лежат на одной прямой.



Точка E — середина отрезка OB, поэтому B определяется однозначно как $(19, 15)$. Пусть (x_a, y_a), (x_c, y_c) — координаты точек A и C. Поскольку E — середина отрезка AC, имеем $x_a + x_c = 19$, $y_a + y_c = 15$. Тогда для x_a имеется 18 возможных натуральных значений: $1, 2, \ldots, 18$, каждому из которых однозначно соответствует натуральное $x_c = 19 - x_a$. Аналогично, для y_a имеется 14 возможностей. Итого $18 \cdot 14 = 252$ возможностей для выбора точки A, и для каждой из них единственным образом определяется подходящая точка C. Согласно нашей договоренности ($OABC$ и $OCBA$ считаются одним и тем же параллелограммом), всего имеем $252/2 = 126$ вариантов.

Заметим, что во всех указанных вариантах точка A (и C) не лежит на прямой OB (иначе выполнялось бы $y_a/x_a = 15/19$), т.е. параллелограмм $OABC$ не вырождается. Таким образом, все найденные варианты действительно подходят.

8.2. *На координатной плоскости рисуют параллелограмм $OABC$, у которого центр находится в точке $\left(\frac{17}{2}, \frac{19}{2}\right)$, а точки A, B и C имеют натуральные координаты. Найдите количество таких параллелограммов. (Здесь через O обозначено начало координат - точка $(0,0)$; два параллелограмма с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. $OABC$ и $OCBA$ считаем одним и тем же параллелограммом.)*

Ответ: 144

8.3. *На координатной плоскости рисуют параллелограмм $OABC$, у которого центр находится в точке $\left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$, а точки A, B и C имеют натуральные координаты. Найдите количество таких параллелограммов. (Здесь через O обозначено начало координат - точка $(0,0)$; два параллелограмма с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. $OABC$ и $OCBA$ считаем одним и тем же параллелограммом.)*

Ответ: 80

8.4. *На координатной плоскости рисуют параллелограмм $OABC$, у которого центр находится в точке $\left(\frac{15}{2}, \frac{13}{2}\right)$, а точки A, B и C имеют натуральные координаты. Найдите количество таких параллелограммов. (Здесь через O обозначено начало координат - точка $(0,0)$; два параллелограмма с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. $OABC$ и $OCBA$ считаем одним и тем же параллелограммом.)*

Ответ: 84

8.5. *На координатной плоскости рисуют параллелограмм $OABC$, у которого центр находится в точке $\left(\frac{13}{2}, \frac{17}{2}\right)$, а точки A, B и C имеют натуральные координаты. Найдите количество таких параллелограммов. (Здесь через O обозначено начало координат - точка $(0,0)$; два параллелограмма с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. $OABC$ и $OCBA$ считаем одним и тем же параллелограммом.)*

Ответ: 96.

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 11 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *1 сентября 2021 года Вася положил в банк 100 000 рублей. Ровно через год банк начисляет 10% годовых (то есть увеличивает сумму на 10 процентов от того, что было в текущий момент на счете, например, 2 сентября 2022 года у Васи на счете будет 110 000 рублей). Найдите наименьший номер года, в котором 2 сентября сумма на счете Васи будет больше, чем 150 100 рублей.*

Ответ: 2026

Решение. Заметим, что 2 сентября $(2021+n)$-го года на счету будет $100000 \cdot 1,1^n$ рублей. Так как $100000 \cdot 1,1^4 = 146410 < 150100 < 161051 = 100000 \cdot 1,1^5$, минимальное n, для которого сумма будет больше чем 150 100 рублей, равно 5. Таким образом, ответ: $2021 + 5 = 2026$.

1.2. *1 сентября 2016 года Вася положил в банк 200 000 рублей. Ровно через год банк начисляет 10% годовых (то есть увеличивает сумму на 10 процентов от того, что было в текущий момент на счете, например, 2 сентября 2017 года у Васи на счете будет 220 000 рублей). Найдите наименьший номер года, в котором 2 сентября сумма на счете Васи будет больше, чем 300 000 рублей.*

Ответ: 2021

1.3. *1 марта 2020 года Вася положил в банк 100 000 рублей. Ровно через год банк начисляет 10% годовых (то есть увеличивает сумму на 10 процентов от того, что было в текущий момент на счете, например, 2 марта 2021 года у Васи на счете будет 110 000 рублей). Найдите наименьший номер года, в котором 2 марта сумма на счете Васи будет больше, чем 150 800 рублей.*

Ответ: 2025

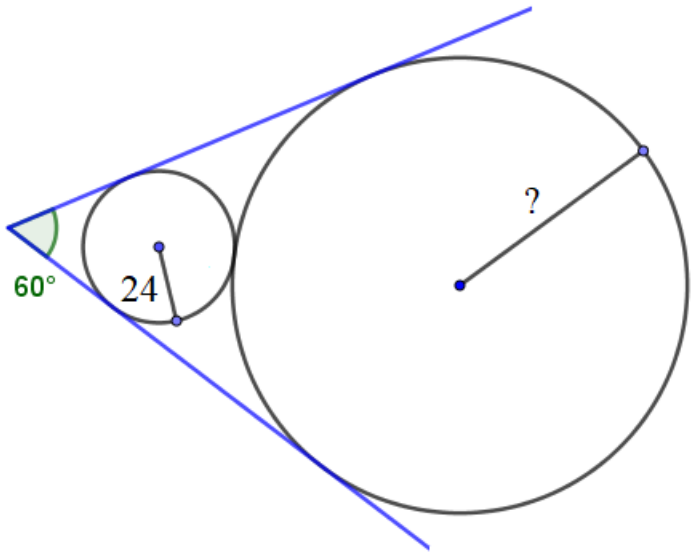
1.4. *1 марта 2018 года Вася положил в банк 200 000 рублей. Ровно через год банк начисляет 10% годовых (то есть увеличивает сумму на 10 процентов от того, что было в текущий момент на счете, например, 2 марта 2019 года у Васи на счете будет 220 000 рублей). Найдите наименьший номер года, в котором 2 марта сумма на счете Васи будет больше, чем 301 000 рублей.*

Ответ: 2023

1.5. *1 октября 2019 года Вася положил в банк 200 000 рублей. Ровно через год банк начисляет 10% годовых (то есть увеличивает сумму на 10 процентов от того, что было в текущий момент на счете, например, 2 октября 2020 года у Васи на счете будет 220 000 рублей). Найдите наименьший номер года, в котором 2 октября сумма на счете Васи будет больше, чем 302 000 рублей.*

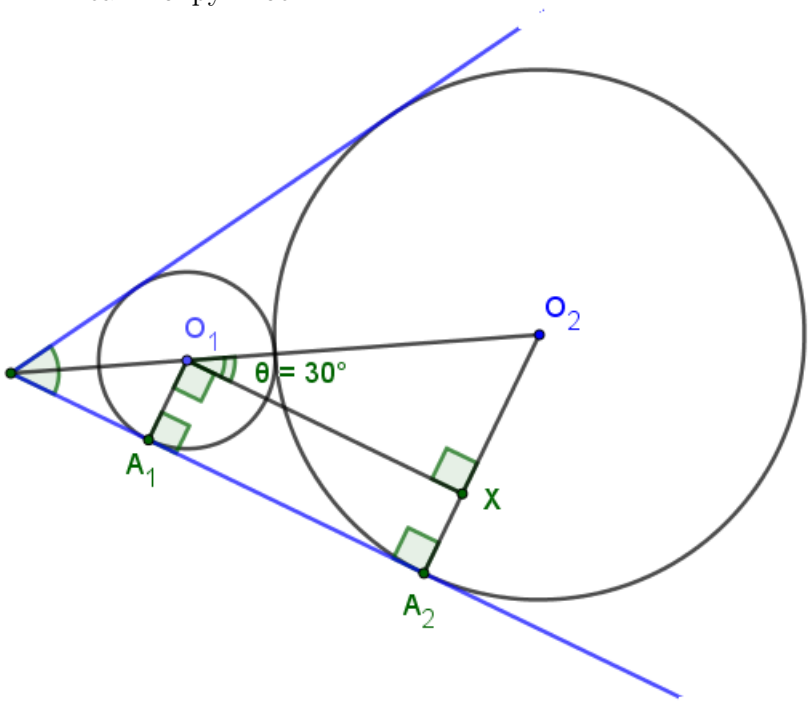
Ответ: 2024

2.1. *В угол величиной 60 градусов вписаны две окружности, которые касаются друг друга. Радиус меньшей окружности равен 24. Чему равен радиус большей окружности?*



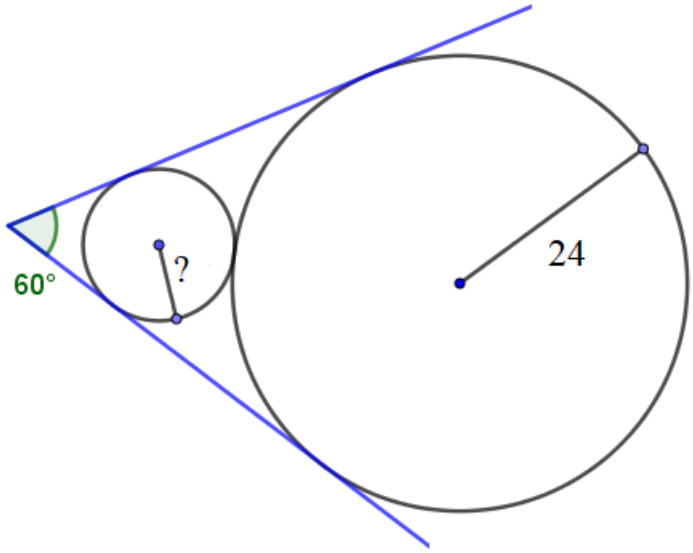
Ответ: 72

Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, $R_1 = 24$ и $R_2 > R_1$ — их радиусы а A_1 и A_2 — точки касания с одной из сторон угла. Тогда $A_1O_1O_2A_2$ — прямоугольная трапеция. Угол между O_1O_2 и A_1A_2 равен половине величины угла, в который вписаны окружности.



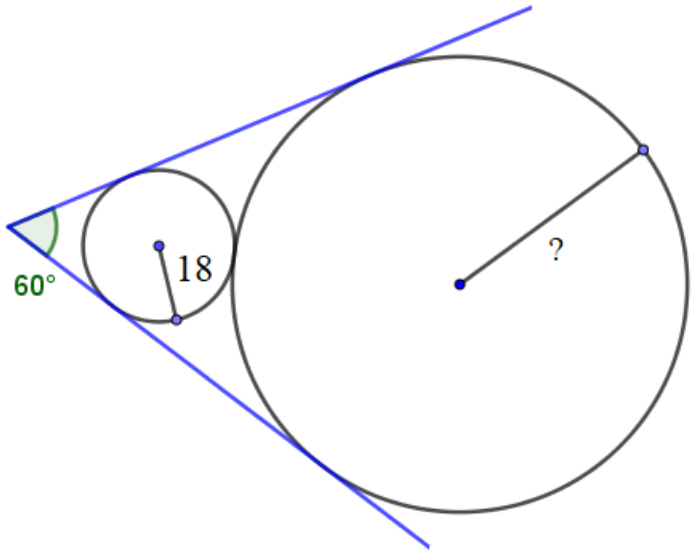
Пусть X — проекция O_1 на O_2A_2. Тогда O_1O_2X — прямоугольный треугольник с прямым углом X и углом XO_1O_2, равным 30°, при этом $O_1O_2 = R_1 + R_2$, $O_2X = R_2 - R_1$. Тогда $\frac{R_2-R_1}{R_2+R_1} = \sin 30° = 1/2$. Имеем $2(R_2 - R_1) = R_2 + R_1$, $R_2 = 3R_1$.

2.2. *В угол величиной 60 градусов вписаны две окружности, которые касаются друг друга. Радиус большей окружности равен 24. Чему равен радиус меньшей окружности?*



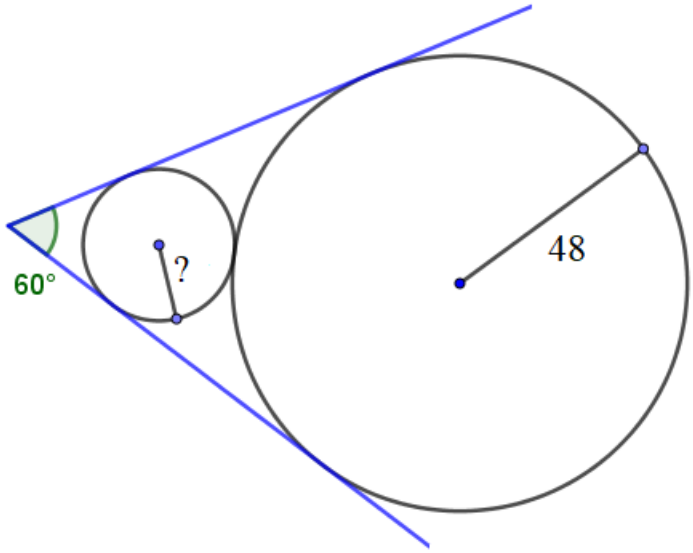
Ответ: 8

2.3. *В угол величиной 60 градусов вписаны две окружности, которые касаются друг друга. Радиус меньшей окружности равен 18. Чему равен радиус большей окружности?*



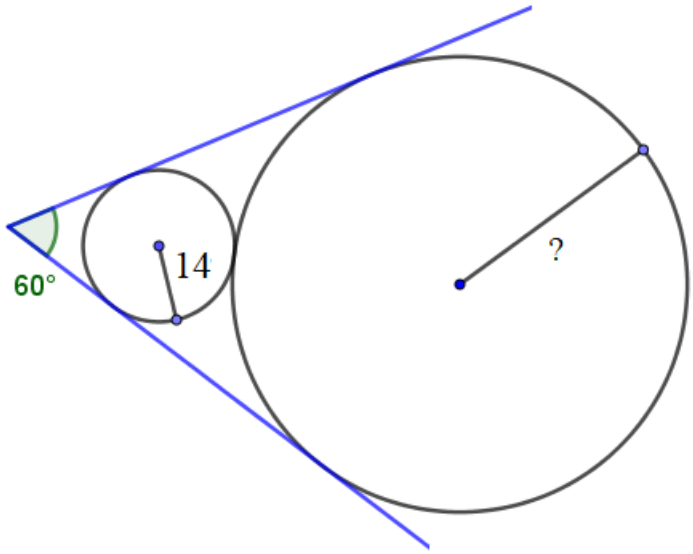
Ответ: 54

2.4. *В угол величиной 60 градусов вписаны две окружности, которые касаются друг друга. Радиус большей окружности равен 48. Чему равен радиус меньшей окружности?*



Ответ: 16

2.5. *В угол величиной 60 градусов вписаны две окружности, которые касаются друг друга. Радиус меньшей окружности равен 14. Чему равен радиус большей окружности?*



Ответ: 42

3.1. *Семён решал квадратное уравнение* $4x^2 + bx + c = 0$ *и обнаружил, что два его корня – это числа* $tg\,\alpha$ *и* $3ctg\,\alpha$ *при некотором* α*. Найдите* c*.*

Ответ: 12

Решение. По теореме Виета $c/4$ равно произведению корней. Учитывая, что $tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$, получаем $c/4 = 3$.

3.2. *Семён решал квадратное уравнение* $4x^2 + bx + c = 0$ *и обнаружил, что два его корня – это числа* $tg\,\alpha$ *и* $4ctg\,\alpha$ *при некотором* α*. Найдите* c*.*

Ответ: 16

3.3. *Семён решал квадратное уравнение* $3x^2 + bx + c = 0$ *и обнаружил, что два его корня – это числа* $tg\,\alpha$ *и* $3ctg\,\alpha$ *при некотором* α*. Найдите* c*.*

Ответ: 9

3.4. *Семён решал квадратное уравнение* $3x^2 + bx + c = 0$ *и обнаружил, что два его корня – это числа* $2tg\,\alpha$ *и* $3ctg\,\alpha$ *при некотором* α*. Найдите* c*.*

Ответ: 18

3.5. *Семён решал квадратное уравнение* $4x^2 + bx + c = 0$ *и обнаружил, что два его корня – это числа* $3tg\,\alpha$ *и* $2ctg\,\alpha$ *при некотором* α*. Найдите* c*.*

Ответ: 24

4.1. *Дана арифметическая прогрессия* a_1, a_2, ..., a_{100}. *Известно, что* $a_3 = 9{,}5$, *а разность прогрессии* $d = 0{,}6$. *Найдите сумму* $\{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_{100}\}$. *Через* $\{x\}$ *обозначена дробная часть числа* x, *т.е. разность между* x *и наибольшим целым числом, не превосходящим* x, *например:* $\{4{,}7\} = 0{,}7$, $\left\{-5\frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}$ *и т.д.*

Ответ: 50

Решение. Посмотрим на первые цифры после запятой в десятичной записи членов прогрессии. Так как $d = 0{,}6$ и $a_3 = 9{,}5$, последовательность этих цифр такова: $3, 9, 5, 1, 7, 3, 9, 5, 1, 7, \ldots$. Она периодична с периодом 5. Тогда сумма дробных частей каждых пяти последовательных членов в прогрессии равна $0{,}3 + 0{,}9 + 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}7 = 2{,}5$. Итого, искомая сумма дробных частей равна $20 \cdot 2{,}5 = 50$.

4.2. *Дана арифметическая прогрессия* a_1, a_2, ..., a_{120}. *Известно, что* $a_2 = 9{,}8$, *а разность прогрессии* $d = 0{,}6$. *Найдите сумму* $\{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_{120}\}$. *Через* $\{x\}$ *обозначена дробная часть числа* x, *т.е. разность между* x *и наибольшим целым числом, не превосходящим* x, *например:* $\{4{,}7\} = 0{,}7$, $\left\{-5\frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}$ *и т.д.*

Ответ: 48

4.3. *Дана арифметическая прогрессия* a_1, a_2, ..., a_{80}. *Известно, что* $a_3 = 9{,}8$, *а разность прогрессии* $d = 0{,}6$. *Найдите сумму* $\{a_1\}+\{a_2\}+\ldots+\{a_{80}\}$. *Через* $\{x\}$ *обозначена дробная часть числа* x, *т.е. разность между* x *и наибольшим целым числом, не превосходящим* x, *например:* $\{4{,}7\} = 0{,}7$, $\left\{-5\frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}$ *и т.д.*

Ответ: 32

4.4. *Дана арифметическая прогрессия* a_1, a_2, ..., a_{100}. *Известно, что* $a_3 = 9{,}8$, *а разность прогрессии* $d = 0{,}4$. *Найдите сумму* $\{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_{100}\}$. *Через* $\{x\}$ *обозначена дробная часть числа* x, *т.е. разность между* x *и наибольшим целым числом, не превосходящим* x, *например:* $\{4{,}7\} = 0{,}7$, $\left\{-5\frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}$ *и т.д.*

Ответ: 40

4.5. *Дана арифметическая прогрессия* a_1, a_2, ..., a_{120}. *Известно, что* $a_2 = 9{,}5$, *а разность прогрессии* $d = 0{,}4$. *Найдите сумму* $\{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_{120}\}$. *Через* $\{x\}$ *обозначена дробная часть числа* x, *т.е. разность между* x *и наибольшим целым числом, не превосходящим* x, *например:* $\{4{,}7\} = 0{,}7$, $\left\{-5\frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}$ *и т.д.*

Ответ: 60

5.1. *Датчик случайных чисел выдает число a — одно из натуральных чисел $1, 2, \ldots, 100$ (с равной вероятностью). Для этого значения a находим максимально возможное значение M функции*

$$f(x) = \frac{700}{x^2 - 2x + 2a}.$$

Вероятность того, что $M > 10$, равна n процентов. Чему равно n?

Ответ: 35

Решение. Минимальное значение квадратного трехчлена $x^2 - 2x + 2a$ равно $2a - 1$. Поскольку для рассматриваемых значений a выполнено $2a - 1 > 0$ (это верно при $a > 1/2$), максимальное значение $f(x)$ равно $M = \frac{700}{2a-1}$. Далее, условие $M > 10$ (при $2a - 1 > 0$) равносильно следующим условиям: $700 > 10(2a - 1) \Leftrightarrow 71 > 2a$. Из натуральных $a = 1, 2, \ldots, 100$ последнему неравенству удовлетворяют 35 первых значений.

5.2. *Датчик случайных чисел выдает число a — одно из натуральных чисел $1, 2, \ldots, 100$ (с равной вероятностью). Для этого значения a находим максимально возможное значение M функции*

$$f(x) = \frac{900}{x^2 - 2x + 3a}.$$

Вероятность того, что $M > 10$, равна n процентов. Чему равно n?

Ответ: 30

5.3. *Датчик случайных чисел выдает число a — одно из натуральных чисел $1, 2, \ldots, 100$ (с равной вероятностью). Для этого значения a находим максимально возможное значение M функции*

$$f(x) = \frac{800}{x^2 - 2x + 2a}$$

. Вероятность того, что $M < 20$, равна n процентов. Чему равно n?

Ответ: 80

5.4. *Датчик случайных чисел выдает число a — одно из натуральных чисел $1, 2, \ldots, 100$ (с равной вероятностью). Для этого значения a находим максимально возможное значение M функции*

$$f(x) = \frac{600}{x^2 - 2x + 4a}$$

. Вероятность того, что $M < 5$, равна n процентов. Чему равно n?

Ответ: 70

5.5. *Датчик случайных чисел выдает число a — одно из натуральных чисел $1, 2, \ldots, 100$ (с равной вероятностью). Для этого значения a находим максимально возможное значение M функции*

$$f(x) = \frac{550}{x^2 - 2x + 3a}.$$

Вероятность того, что $M > 10$, равна n процентов. Чему равно n?

Ответ: 18

6.1. *В ряд записали числа:* 100^{100}, 101^{101}, 102^{102}, $\ldots$, 876^{876} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 100 до 876.) Сколько среди выписанных чисел точных кубов? (Точным кубом называют куб целого числа.)*

Ответ: 262

Решение. Рассмотрим число вида m^k, где m и k — натуральные числа. Если k делится на 3, то m^k — точный куб. Иначе m^k является точным кубом тогда и только тогда, когда m является точным кубом. Таким образом, ответ в нашей задаче — суммарное количество чисел, делящихся на 3, и не делящихся на 3 точных кубов в множестве чисел $\{100, 101, 102, \ldots, 876\}$. Нужных делящихся на 3 чисел $(876 - 99)/3 = 259$. Нужных точных кубов — ровно 3: $5^3, 7^3, 8^3$. Итого $259 + 3 = 262$ искомых чисел.

6.2. *В ряд записали числа:* 121^{121}, 122^{122}, 123^{123}, $\ldots$, 900^{900} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 121 до 900.) Сколько среди выписанных чисел точных кубов? (Точным кубом называют куб целого числа.)*

Ответ: 263

6.3. *В ряд записали числа:* 105^{105}, 106^{106}, 107^{107}, $\ldots$, 848^{848} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 105 до 848.) Сколько среди выписанных чисел точных кубов? (Точным кубом называют куб целого числа.)*

Ответ: 251

6.4. *В ряд записали числа:* 115^{115}, 116^{116}, 117^{117}, $\ldots$, 879^{879} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 115 до 879.) Сколько среди выписанных чисел точных кубов? (Точным кубом называют куб целого числа.)*

Ответ: 258

6.5. *В ряд записали числа:* 111^{111}, 112^{112}, 113^{113}, $\ldots$, 905^{905} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 111 до 905.) Сколько среди выписанных чисел точных кубов? (Точным кубом называют куб целого числа.)*

Ответ: 268

7.1. *В треугольной пирамиде $ABCD$ известно: $AB = CD = 6$, $AD = BC = 10$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R – радиус наименьшего шара, в который можно поместить такую пирамиду.*

Ответ: 49

Решение. Так как отрезок AC помещается в шар, то $2R \geqslant AC$. С другой стороны, шар, построенный на AC как на диаметре, покрывает как треугольник ABC, поскольку $\angle ABC > 90^\circ$, так и равный ему (по трем сторонам) треугольник BAD, и следовательно, покрывает весь тетраэдр. Таким образом, искомое значение R равно $AC/2$, и $R^2 = AC^2/4$.

Далее, по теореме косинусов имеем $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 6^2 + 10^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10/2 = 4(3^2 + 5^2 + 3 \cdot 5) = 4 \cdot 49$.

7.2. *В треугольной пирамиде $ABCD$ известно: $AB = CD = 10$, $AD = BC = 4$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R – радиус наименьшего шара, в который можно поместить такую пирамиду.*

Ответ: 39

7.3. *В треугольной пирамиде $ABCD$ известно: $AB = CD = 4$, $AD = BC = 8$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R – радиус наименьшего шара, в который можно поместить такую пирамиду.*

Ответ: 28

7.4. *В треугольной пирамиде $ABCD$ известно: $AB = CD = 12$, $AD = BC = 4$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R – радиус наименьшего шара, в который можно поместить такую пирамиду.*

Ответ: 52

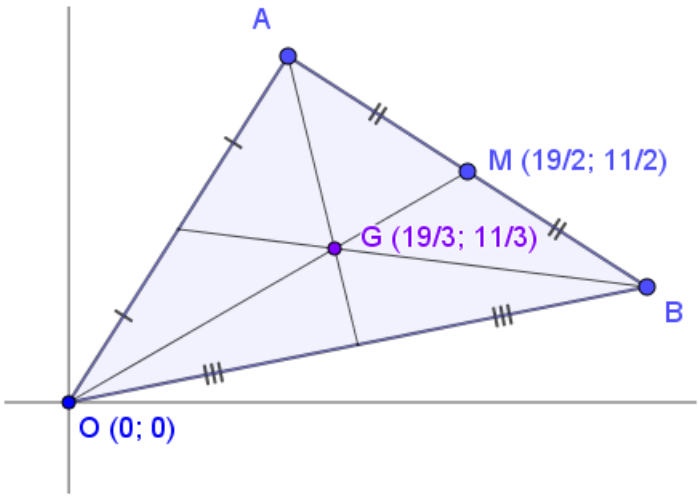
7.5. *В треугольной пирамиде $ABCD$ известно: $AB = CD = 8$, $AD = BC = 10$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R – радиус наименьшего шара, в который можно поместить такую пирамиду.*

Ответ: 61

8.1. *На координатной плоскости рисуют треугольник OAB, у которого точка пересечения медиан находится в точке $\left(\frac{19}{3}, \frac{11}{3}\right)$, а точки A и B имеют натуральные координаты. Найдите количество таких треугольников. (Здесь через O обозначено начало координат – точка $(0,0)$; два треугольника с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. OAB и OBA считаем одним и тем же треугольником.)*

Ответ: 90.

Пусть M — середина AB. Тогда по свойству медианы, $OM = \frac{3}{2}OG$, где G — точка пересечения медиан. Поэтому M имеет координаты $\left(\frac{19}{2}, \frac{11}{2}\right)$.



Пусть (x_a, y_a), (x_b, y_b) — координаты точек A и B. Поскольку M — середина отрезка AB, имеем $x_a + x_b = 19$, $y_a + y_b = 11$. Тогда для x_a имеется 18 возможных натуральных значений: $1, 2, \ldots, 18$, каждому из которых однозначно соответствует натуральное $x_b = 19 - x_a$. Аналогично, для y_a имеется 10 возможностей. Итого $18 \cdot 10 = 180$ возможностей для выбора точки A, и для каждой из них единственным образом определяется подходящая точка B. Согласно нашей договоренности (OAB и OBA считаются одним и тем же треугольником), всего имеем $180/2 = 90$ вариантов.

Заметим, что во всех указанных вариантах точка A (и B) не лежит на прямой OM, т.е. треугольник OAB не вырождается (иначе выполнялось бы $y_a/x_a = 11/19$). Таким образом, все найденные варианты действительно подходят.

8.2. *На координатной плоскости рисуют треугольник OAB, у которого точка пересечения медиан находится в точке $\left(\frac{17}{3}, \frac{14}{3}\right)$, а точки A и B имеют натуральные координаты. Найдите количество таких треугольников. (Здесь через O обозначено начало координат – точка $(0,0)$; два треугольника с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. OAB и OBA считаем одним и тем же треугольником.)*

Ответ: 104.

8.3. *На координатной плоскости рисуют треугольник OAB, у которого точка пересечения медиан находится в точке $\left(\frac{16}{3}, \frac{11}{3}\right)$, а точки A и B имеют натуральные координаты. Найдите количество таких треугольников. (Здесь через O обозначено начало координат – точка $(0,0)$; два треугольника с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. OAB и OBA считаем одним и тем же треугольником.)*

Ответ: 75.

8.4. *На координатной плоскости рисуют треугольник OAB, у которого точка пересечения медиан находится в точке $\left(\frac{20}{3}, \frac{13}{3}\right)$, а точки A и B имеют натуральные координаты. Найдите количество таких треугольников. (Здесь через O обозначено начало координат – точка $(0,0)$; два треугольника с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. OAB и OBA считаем одним и тем же треугольником.)*

Ответ: 114.

8.5. *На координатной плоскости рисуют треугольник OAB, у которого точка пересечения медиан находится в точке $\left(\frac{10}{3}, \frac{19}{3}\right)$, а точки A и B имеют натуральные координаты. Найдите количество таких*

треугольников. (Здесь через O обозначено начало координат – точка $(0,0)$; два треугольника с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. OAB и OBA считаем одним и тем же треугольником.)

Ответ: 81.