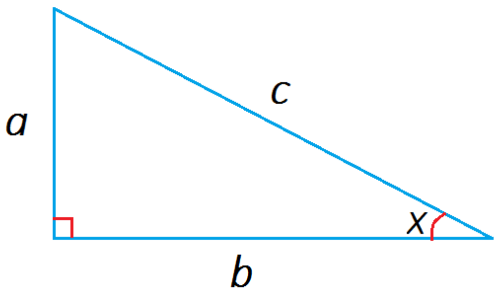
Тринадцатое задание

Тригонометрия

Основные тригонометрические формулы

Большинство формул в тригонометрии часто применяется как справа налево, так и слева направо, поэтому учить эти формулы нужно так хорошо, чтобы Вы легко смогли применить некоторую формулу в обоих направлениях. Запишем для начала определения тригонометрических функций.



Из прямоугольного треугольника напишем основные тригонометрические функции по определению.

$\sin x = \frac{a}{c}$	$\cos x = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$	$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{b}{a}$

Основное тригонометрическое тождество и следствия

<table>
<tr><td colspan="2">$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$</td><td>$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$</td></tr>
<tr><td>$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$</td><td>$\operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$</td><td>$\operatorname{ctg} x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$</td></tr>
</table>

Формулы двойного угла

$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x = \dfrac{2tgx}{1+tg^2x}$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$
$tg2x = \dfrac{2tgx}{1-tg^2x}$
$ctg2x = \dfrac{1-tg^2x}{2tgx} = \dfrac{ctg^2x-1}{2ctgx}$

Тригонометрические формулы сложения аргументов

$\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y$	$\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y$
$\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y$	$\cos(x-y) = \cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y$
$tg(x+y) = \dfrac{tgx+tgx}{1-tgx\cdot tgy}$	$tg(x-y) = \dfrac{tg\,x-tgx}{1+tgx\cdot tgy}$
$ctg(x+y) = \dfrac{1-tgx\cdot tgy}{tgx+tgy} = \dfrac{ctgx\cdot ctgy-1}{ctgy+ctgx}$	$ctg(x-y) = \dfrac{1+tgx\cdot tgy}{tgx-tgy} = \dfrac{ctgx\cdot ctgy+1}{ctgy-ctgx}$

Формулы понижения степени

$\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$	$\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$
$tg^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$	$ctg^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$

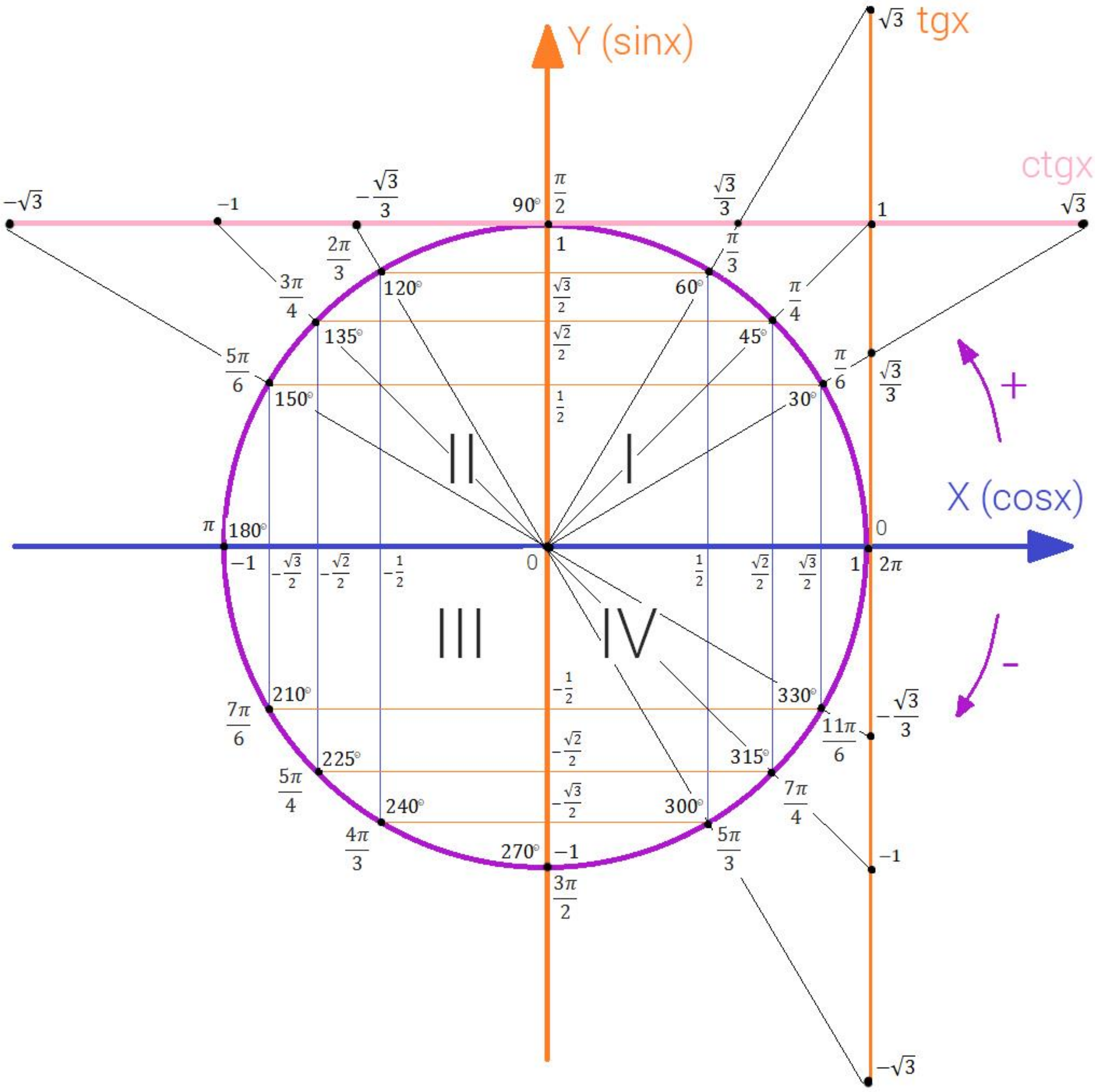
Тригонометрические формулы преобразования суммы в произведение

$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$	
$\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}$	
$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$	
$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$	
$tgx + tgy = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$	$tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$
$ctgx + ctgy = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \cdot \sin y}$	$ctgx - ctgy = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$

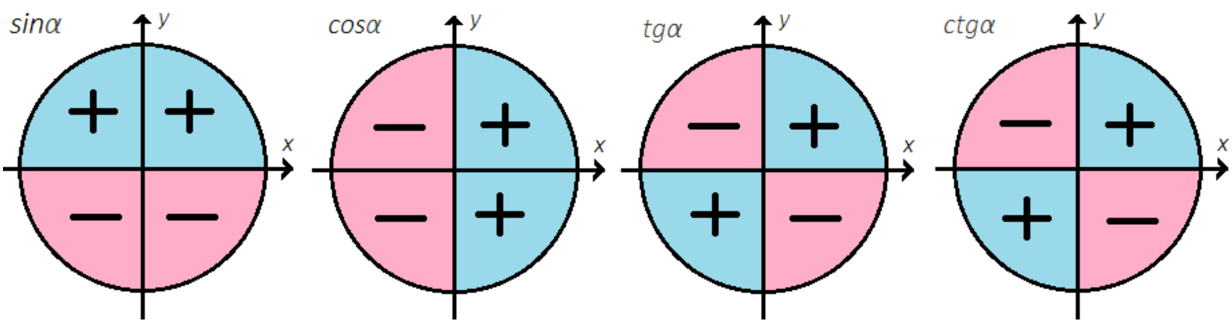
Тригонометрические формулы преобразования произведения в сумму

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x-y) - \cos(x+y))$
$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x-y) + \sin(x+y))$
$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x-y) + \cos(x+y))$

Тригонометрическая окружность



Знаки тригонометрических функций по четвертям



Easy•Game•Exam

Тригонометрические функции основных углов

Функция	Углы				
	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
ctgx	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Тригонометрические формулы приведения

- Если в формуле приведения угол вычитается (прибавляется) из $\frac{\pi n}{2}$, то синус меняется на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс.
- Если же в формуле приведения угол вычитается (прибавляется) из πn, то функция сохраняется;
- При этом, перед полученной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в соответствующей четверти, если считать вычитаемый (прибавляемый) угол острым.

Формулы приведения в таблице

Функции	Углы								
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin	$-sin\alpha$	$+cos\alpha$	$+cos\alpha$	$+sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$+sin\alpha$
cos	$+cos\alpha$	$+sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$+sin\alpha$	$+cos\alpha$	$+cos\alpha$
tg	$-tg\alpha$	$+ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$+tg\alpha$	$+ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$+tg\alpha$
ctg	$-ctg\alpha$	$+tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$+ctg\alpha$	$+tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$+ctg\alpha$

Решение простейших тригонометрических уравнений

$-1 \le \sin x \le 1; \ -1 \le \cos x \le 1$

$\sin x = a,\ x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$
$\cos x = a,\ x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$
$tg x = a,\ x = arctg a + \pi k,\ k \in Z$
$ctg x = a,\ x = arcctg a + \pi k,\ k \in Z$

Однородное уравнение вида: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0,\ a \ne 0,\ b \ne 0$

1. Поделим левую и правую часть на $\cos x \ne 0,\ \ x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in N$.
2. Получим уравнение вида $a \cdot tg x + b = 0 \to tg x = -\frac{b}{a}$,

$$x = -arctg\left(\frac{a}{b}\right) + \pi n, \text{ где } n \in N.$$

Введение вспомогательного угла

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c, \qquad a \cdot b \ne 0, c \ne 0$

Поделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2} \ne 0$, получим уравнение вида $A \cdot \sin x + B \cdot \cos x = C$, где $A = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $B = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $C = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

Можно подобрать такой угол α, что $A = \sin\alpha$ и $B = \cos\alpha$, получим

$$\sin\alpha \cdot \sin x + \cos\alpha \cdot \cos x = C.$$

По свойству разности аргументов косинуса, получим уравнение вида

$$\cos(x-\alpha) = C \to x = \alpha \pm \arccos C + 2\pi n, \text{ где } n \in N$$

Замена неизвестного t=sinx+cosx

Рассмотрим уравнения, в которые входят sinx+cosx и sin2x.

Например, $\sin x+\cos x+\sin 2x=1$

Введем замену $\sin x+\cos x=t$, тогда

$$\sin 2x=\sin 2x+1-1=\cos^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x-1=$$

$$=(\sin x+\cos x)^2-1=t^2-1.$$

Получим уравнение вида:

$$t^2+t-1=1$$

Решив квадратное уравнение, приведем уравнение к виду введения вспомогательного угла $\sin x+\cos x=t_{1,2}$. Как его решать, смотри пунктом ранее.

Логарифмы

Логарифм числа **b** по основанию **a** определяется как показатель степени, в которую нужно возвести основание **a**, чтобы получить число **b**.

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

Область допустимых значений (ОДЗ) логарифма

$$\log_a b \rightarrow \begin{cases} a>0, \\ a\neq 1, \\ b>0. \end{cases}$$

Свойства логарифмов

$\log_a 1 = 0$	$a^{\log_a c} = c^{\log_a a}$
$\log_a a = 1$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
$\log_a b^k = k\log_a b$	$\log_a b\cdot c = \log_a b + \log_a c$
$\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k}\log_a b$	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b \rightarrow x = a^b,\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$

Уравнения вида: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Уравнения вида: $A \cdot \log_a^2 f(x) \pm B \cdot \log_a f(x) \pm C = 0$

Решаем заменой $\log_a f(x) = t$, получаем обычное квадратное уравнение:

$$A \cdot t^2 \pm B \cdot t \pm C = 0$$

Показательные уравнения

Показательное уравнение — это любое уравнение, содержащее в себе показательную функцию, т.е. выражение вида a^x. Помимо указанной функции подобные уравнения могут содержать в себе любые другие алгебраические конструкции — многочлены, корни, тригонометрию, логарифмы и т.д.

Свойства степени для $n \in R, k \in R$

$a^0 = 1$, где $a \neq 0$	$a^1 = a,$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$, где $a \neq 0$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a \neq 0$
$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$	$a^n : a^k = a^{n-k}$, где $a \neq 0$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, где $b \neq 0$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$

Решение показательных уравнений

$$a^x = b, \quad a, b > 0$$

В простом случае, **b** можно представить через основание **a**

$$b = a^m \Longrightarrow a^x = a^m \Longrightarrow x = m$$

Если представить **b** через основание а невозможно, то воспользуемся свойством логарифма

$$a = b^{\log_b a}, \ a > 0, \ 1 \neq b > 0$$