Задание 1.

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-6} = 4^{3x}$.

Решение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-6} = 4^{3x}$$

$$4^{-x+6} = 4^{3x}$$

$$-x + 6 = 3x$$

$$4x = 6$$

$$x = 1{,}5$$

Ответ: 1,5

Задание 2.

В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Решение:

Количество исходов, при котором суммарно выпадет 7 очков, равно 6: 1 и 6, 6 и 1, 2 и 5, 5 и 2, 3 и 4, 4 и 3. К каждый кубик может выпасть шестью различными вариантами, так как кубика два и события независимые, то по правилу произведения получим общее количество исходов 6·6=36. Значит искомая вероятность равна $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1(6) \approx 0{,}17$.

Ответ: 0,17.

Задание 3.

Точки *A*, *B*, *C*, *D*, расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги *AB*, *BC*, *CD* и *AD*, градусные величины которых относятся соответственно как 5 : 2 : 3 : 8 (см. рис. 4). Найдите угол *BAD* четырехугольника *ABCD*. Ответ дайте в градусах.

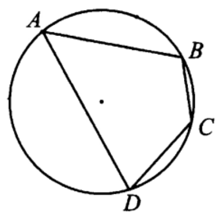


Рис. 4

Решение:

Пусть длина дуги *AB* равна 5*x*, тогда *BC* =2*x*, *CD* = 3*x*, *AD* = 8*x*. Градусная мера окружности равна 360°, поэтому $5x + 2x + 3x + 8x = 360° \Rightarrow 18x = 360° \Rightarrow x = 20°$. Значит

$$BC = 40°, CD = 60°.$$

Вписанный угол равен половине дуги окружности, на которую он опирается, поэтому $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup BD = \frac{1}{2}(\cup BC + \cup CD) = \frac{1}{2}(40° + 60°) = 50°$.

Ответ: 50°.

Задание 4.

Найдите значение выражения $9\sqrt{3}\tan\frac{13\pi}{6}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$.

Решение:

$$9\sqrt{3}\tan\frac{13\pi}{6}\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = 9\sqrt{3}\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = 9\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 9\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -4{,}5$$

Ответ: $-4{,}5$.

Задание 5.

Диагональ куба равна $\sqrt{75}$. Найдите объем куба (см. рис. 5).

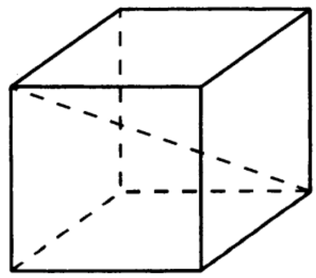


Рис. 5

Решение:

Диагональ куба равна $d = a\sqrt{3}$, где a – сторона куба. Зная, что $d = \sqrt{75}$, получим $a = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} =$ $= \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$, значит объем куба $V = a^3 = 5^3 = 125$.

Ответ: 125.

Задание 6.

На рисунке 6 изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале (–7; 8). В какой точке отрезка [–5; 2] $f(x)$ принимает наибольшее значение?

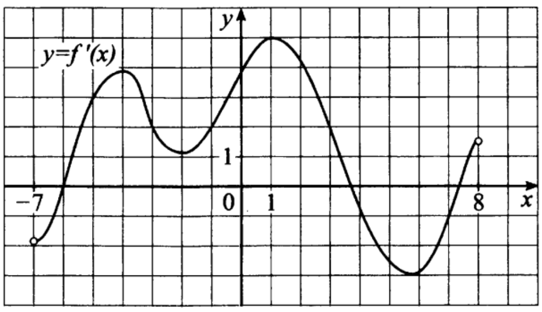


Рис. 6

Решение:

На данном промежутке производная функции принимает только положительные значения, поэтому исходная функция возрастает, а значит наибольшее значение на отрезке принимает на правом конце отрезка, а значит при $x = 2$.

Ответ: 2.

Задание 7.

При температуре 0°C рельс имеет длину l_0 = 20 м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t°) = l_0(1 + \alpha \cdot t°)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение:

$$l(t_0) - l_0 = 6 \text{ мм}$$

$$l_0(1 + \alpha \cdot t°) - l_0 = 6 \cdot 10^{-3}$$

$$l_0 \alpha t° = 6 \cdot 10^{-3}$$

$$t° = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{l_0 \alpha} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}} = 25°C$$

Ответ: 25°C.

Задание 8.

Из городов *M* и *N*, расстояние между которыми равно 490 км, навстречу друг другу одновременно выехали два самосвала и встретились через 6 часов на расстоянии 238 км от города *M*. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города *N*. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть *x* км/ч – скорость самосвала, выехавшего из города *N*.

Так как самосвалы встретились на расстоянии 238 км от города *M*, а расстояние между городами 490 км, то самосвал, выехавший из города *N*, проехал 490 км – 238 км = 252 км. Так как самосвалы встретились через 6 часов, то скорость самосвала, выехавшего из города *N* равна

$$x = \frac{252 \text{ км}}{6\text{ч}} = 42\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: 42 км/ч.

Задание 9.

График функции $y = \frac{k}{x} + b$ проходит через точки (2; 4) и (-4; 5,5). Найдите k.

Решение:

Так как график функции $y = \frac{k}{x} + b$ проходит через точки (2; 4) и (-4; 5,5), то координаты этих точек удовлетворяют заданной функцией, подставив координаты, получим систему из двух уравнений и решим её.

$$\begin{cases} 4 = \dfrac{k}{2} + b \\ 5{,}5 = \dfrac{k}{4} + b \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе получим $4 - 5{,}5 = \frac{k}{2} - \frac{k}{4} \Rightarrow -1{,}5 = \frac{k}{4} \Rightarrow k = -6.$

Ответ: -6.

Задание 10.

Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,85. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

Решение:

Вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток, равна сумме вероятностей того, что сообщение отправится с первой попытки, и того, что сообщение отправится со второй попытки.

Вероятность того, что сообщение отправится с первой попытки равна 0,85, а вероятность того, что сообщение отправится со второй попытки равна $0{,}15 \cdot 0{,}85 = 0{,}1275$, где 0,15 – вероятность того, что сообщение не отправится с первой попытки, которая вычисляется как вероятность противоположного события, то есть $1 – 0{,}85 = 0{,}15$, а 0,85 – вероятность удачной отправки со второй попытки.

Искомая вероятность равна $0{,}85 + 0{,}1275 = 0{,}9775$.

Ответ: 0,9775.

Задание 11.

Найдите точку минимума функции $y = 5x - \ln(x + 7) + 9$.

Решение:

Функция определена и дифференцируема на $(-7; +\infty)$.

Чтобы найти точку минимума функции, необходимо найти производную функции, и вычислить значения, при которых производная функции обращается в ноль.

Найдем производную функции: $y' = 5 - \frac{1}{x+7}$. Найдем значения x, при которых производная обращается в ноль, для этого решим уравнение:

$$5 - \frac{1}{x+7} = 0 \Rightarrow 5 = \frac{1}{x+7} \Rightarrow x + 7 = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5} - 7 = -6{,}8.$$

Значит точка минимума $x = -6{,}8$.

Ответ: –6,8.

Задание 12.

а) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}\cos(3\pi - x)$

б) Найдите корни данного уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Решение:

а)

$$2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}\cos(3\pi - x)$$

$$-2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sqrt{2}\cos(x)$$

$$2\cos x \sin x = -\sqrt{2}\cos(x)$$

$$2\cos x\sin x+\sqrt{2}\cos(x)=0$$

$$\cos(x)\cdot\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)=0$$

$$\cos x=0 \qquad\qquad 2\sin x+\sqrt{2}=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\text{ где } k\in\mathbb{Z} \qquad\qquad \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\text{ где } n\in\mathbb{Z}$$

$$x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\text{ где } m\in\mathbb{Z}$$

б) Отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-5\pi;\ -\frac{5\pi}{2}\right]$ с помощью двойных неравенств:

$$-5\pi\le\frac{\pi}{2}+\pi k\le-\frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{11\pi}{2}\le\pi k\le-\frac{6\pi}{2}$$

$$-\frac{11}{2}\le k\le-3$$

$$-5{,}5\le k\le-3$$

Так как $k\in\ \mathbb{Z}$, то подходящие k есть:

$k=-5\Rightarrow x=\ \frac{\pi}{2}+\pi\cdot(-5)=\frac{\pi}{2}-5\pi=-\frac{9\pi}{2};$

$k=-4\Rightarrow x=\ \frac{\pi}{2}+\pi\cdot(-4)=\frac{\pi}{2}-4\pi=-\frac{7\pi}{2};$

$k=-3\Rightarrow x=\ \frac{\pi}{2}+\pi\cdot(-3)=\frac{\pi}{2}-3\pi=-\frac{5\pi}{2};$

$$-5\pi\le-\frac{3\pi}{4}+2\pi m\le-\frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{17\pi}{4}\le2\pi m\le-\frac{7\pi}{4}$$

$$-\frac{17}{8}\le m\le-\frac{7}{8}$$

$$-2{,}125\le m\le-0{,}875$$

Так как $m\in\ \mathbb{Z}$, то подходящие m есть:

$m=-2\Rightarrow x=\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi\cdot(-2)=-\frac{3\pi}{4}-4\pi=-\frac{19\pi}{4};$

$m=-1\Rightarrow x=\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi\cdot(-1)=-\frac{3\pi}{4}-2\pi=-\frac{11\pi}{4};$

$$-5\pi\le-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le-\frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{19\pi}{4}\le2\pi n\le-\frac{9\pi}{4}$$

$$-\frac{19}{8}\le n\le-\frac{9}{8}$$

$$-2{,}375\le n\le-1{,}125$$

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то подходящие n есть $n = -2 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot (-2) = -\frac{\pi}{4} - 4\pi = -\frac{17\pi}{4}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{19\pi}{4}, -\frac{9\pi}{2}, -\frac{17\pi}{4}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{5\pi}{2}$.

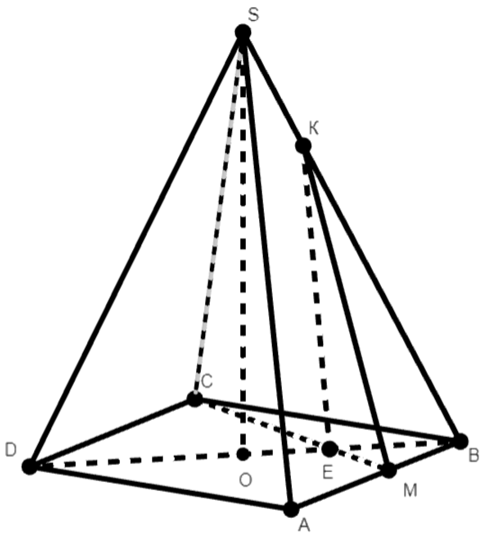
Задание 13.

В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* = 8, а боковое ребро *SA* = 12. На рёбрах *AB* и *SB* отмечены точки *M* и *K* соответственно, причём *AM* = 3,2, *SK* = 3.

а) Докажите, что плоскость *CKM* перпендикулярна плоскости *ABC*.

б) Найдите объём пирамиды *BCKM*.

Решение:



а) Пусть *E* – точка пересечения *BD* и *CM*. Так как пирамида правильная, то её основание это квадрат. В квадрате *ABCD* треугольники *BEM* и *DEC* подобны по двум углам. Тогда по определению подобных треугольников: $\frac{DE}{BE} = \frac{CD}{BM} = \frac{AB}{AB-AM} = \frac{8}{8-3,2} = \frac{8}{4,8} = \frac{5}{3} \Rightarrow$ $BE = \frac{3}{5}DE$

$$\begin{cases} BD = BE + DE \\ BE = \frac{3}{5}DE \end{cases} \Rightarrow BD = DE + \frac{3}{5}DE = \frac{8}{5}DE \Rightarrow$$

$DE = \frac{5}{8}BD$; $BE = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8}BD = \frac{3}{8}BD$.

Пусть *SO* – высота *SABCD*, так как *SABCD* – правильная пирамида, то $SO \in (SBD)$/

Рассмотрим треугольник *SOB*: $\frac{BE}{BO} = \frac{2BE}{BD} = 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4} = \frac{KB}{SB}$, так как $SB = 12$, а $KB = SB - SK = 12 - 3 = 9$.

Откуда по теореме Фалеса $KE \parallel SO$. Так как SO – высота, то $SO \perp (ABC)$, значит и $KE \perp (ABC)$. Так как (*CKM*) содержит прямую KE, перпендикулярную (ABC), то эти плоскости перпендикулярны, то есть (*CKM*) $\perp$ (ABC).

б) Пусть h – высота *BCKM*, проведенная из т. *K*. Имеем: $OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\left(AB\sqrt{2}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$;

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{12^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{144 - 32} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$.

Треугольники *KBE* и *SBO* подобны по двум углам, так как $KE \parallel SO$. Тогда $\frac{KE}{SO} = \frac{KB}{SB} \Rightarrow$ $KE = \frac{KB}{SB} \cdot SO = \frac{3}{4} \cdot 4\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$. Так как $KE \perp (ABC)$, то KE и является высотой пирамиды *BCKM*.

$$S_{BCM} = \frac{BM \cdot BC}{2} = \frac{(AB - AM) \cdot AB}{2} = \frac{(8 - 3,2) \cdot 8}{2} = 4,8 \cdot 4 = 19,2$$

$$V_{BCKM} = \frac{1}{3} S_{BCM} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 19{,}2 \cdot 3\sqrt{7} = 19{,}2\sqrt{7} = \frac{96\sqrt{7}}{5}$$

Ответ: б) $V_{BCKM} = \frac{96\sqrt{7}}{5}$.

Задание 14.

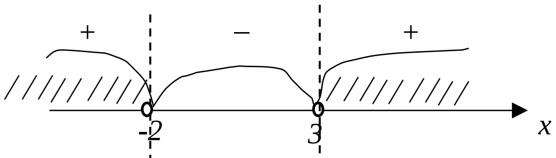
Решите неравенство $3\log_7(x^2 - x - 6) - \log_7 \frac{(x+2)^3}{x-3} \le 4$

Решение:

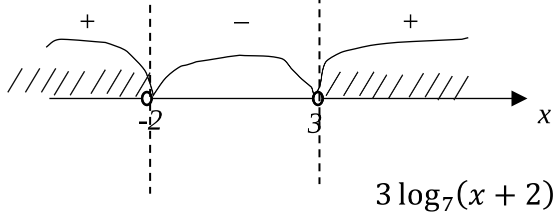
$$3\log_7(x^2 - x - 6) - \log_7 \frac{(x+2)^3}{x-3} \le 4$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ \frac{(x+2)^3}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2x - 6 > 0 \\ \frac{(x+2)^3}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3) + 2(x-3) > 0 \\ \frac{(x+2)^3}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2) > 0 \\ \frac{(x+2)^3}{x-3} > 0 \end{cases}$

Найдем ОДЗ методом интервалов:



Таким образом ОДЗ: $x \in (-\infty;\ -2) \cup (3;\ +\infty)$.



$$3\log_7(x+2)(x-3) - \log_7 \frac{(x+2)^3}{x-3} \le 4$$

$$\log_7(x+2)^3(x-3)^3 - \log_7 \frac{(x+2)^3}{x-3} \le 4$$

$$\log_7 \frac{(x+2)^3(x-3)^3(x-3)}{(x+2)^3} \le 4$$

$$\log_7(x-3)^4 \le 4$$

$$\log_7(x-3)^4 \le \log_7 7^4$$

Так как $7 > 0$, то перейдем к неравенству $(x-3)^4 \le 7^4$

$$(x-3)^4 - 7^4 \le 0$$

$$((x-3)^2 - 7^2)((x-3)^2 + 7^2) \le 0$$

$$(x^2 - 6x + 9 - 49)(x^2 - 6x + 9 + 49) \le 0$$

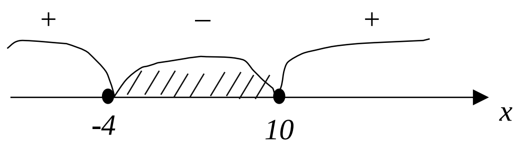
$$(x^2 - 6x - 40)(x^2 - 6x + 58) \le 0$$

$$(x-10)(x+4)(x^2 - 6x + 58) \le 0$$

Дискриминант выражения во второй скобке $D = 36 - 4 \cdot 58 = -196 < 0$, так как дискриминант отрицательный, то выражение принимает значение того же знака, что и старший коэффициент на всей области определения, старший коэффициент равен 1, поэтому выражение во второй скобке положительное на всей области определения, значит наше неравенство сводится к неравенству

$$(x-10)(x+4) \le 0$$

Решим неравенство методом интервалов:



Тогда решение неравенства: $x \in [-4;\ 10]$

С учетом ОДЗ: $x \in\ [-4;\ -2) \cup (3; 10]$.

Ответ: $x \in\ [-4;\ -2) \cup (3; 10]$.

Задание 15.

В мае планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по апрель каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в мае каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на май предыдущего года.

На какой минимальный срок (целое число лет) следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,44 млн рублей?

Решение:

Так как в задаче долг уменьшается равномерно, то речь идет о дифференцированных платежах. При такой схеме погашения кредита платеж состоит из двух компонентов:

$$\text{Платеж} = \ \frac{S}{n} + p\% \text{ от долга,}$$

где S – сумма кредита, n – количество выплат (срок , p – процентная ставка.

Ясно, что наибольшим будет являться первый платеж, так как в первый раз необходимо погасить максимальную сумму долга. Тогда первый платеж будет вычисляться по формуле $\frac{s}{n} + \frac{pS}{100}$.

По условию задачи наибольший годовой платеж не должен превышать 1,44 млн рублей, тогда получим неравенство:

$$\frac{5}{n} + \frac{18 \cdot 5}{100} \le 1{,}44$$

$$\frac{5}{n} + \frac{90}{100} \le 1{,}44$$

$$\frac{5}{n} - 1{,}44 + 0{,}9 \le 0$$

$$\frac{5}{n} - 0{,}54 \le 0$$

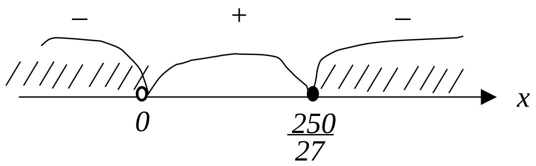
$$\frac{5}{n} - \frac{54}{100} \le 0$$

$$\frac{500 - 54n}{100n} \le 0$$

$$\frac{500 - 54n}{100n} \le 0$$

$$\frac{250 - 27n}{50n} \le 0$$

Решим неравенство методом интервалов:



Тогда решение неравенства: $n \in (-\infty;\ -2) \cup \left[\frac{250}{27};\ +\infty\right).$

Так как количество выплат не может быть отрицательным, то минимальных срок, на который можно взять кредит составит 10 лет.

Ответ: 10 лет.

Задание 16.

В прямоугольном треугольнике ABC точка N лежит на катете BC, а точка M лежит на продолжении катета AC за точку C причем $AC = CN$ и $BC = CM$. Отрезки CH и CK — высоты треугольников ABC и CMN соответственно.

а) Докажите, что CK и CH перпендикулярны.

б) Прямые AN и BM пересекаются в точке D. Найдите DN если $AC = 5$, а $BC = 12$.

Решение:

Дано:

ΔABC – прямоугольный;

$N \in BC$;

$M \in AC$;

$AC = CN$;

$BC = CM$;

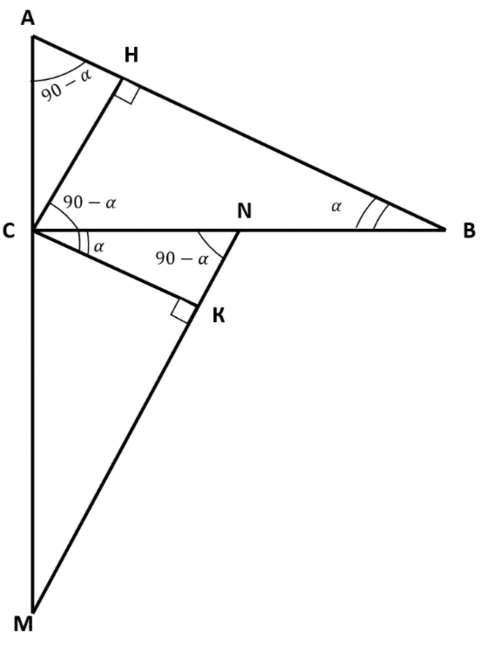
CH и CK – высоты треугольников ABC и CMN соответственно.

∠

∥

а) Доказать, что CH и CK перпендикулярны.

б) $AN \cap BN = D$; $AC = 5$; $BC = 12$. Найти DN.



Решение:

а) 1. Прямоугольные треугольники ABC и NCM равны по двум катетам:

1) $\angle \boldsymbol{ACB} = \mathbf{90}°$ по условию, $\angle \boldsymbol{N}CM = \mathbf{90}°$ как смежный с прямым $\angle \boldsymbol{ACB}$;

2) $AC = CN$;

3) $BC = CM$.

Тогда в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы.

2. Пусть $\angle \boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{\alpha},$ тогда $\angle \boldsymbol{CAB} = \mathbf{90}° - \boldsymbol{\alpha}$, так как в прямоугольном треугольнике $\boldsymbol{ABC}$ сумма острых углов равна 90°.

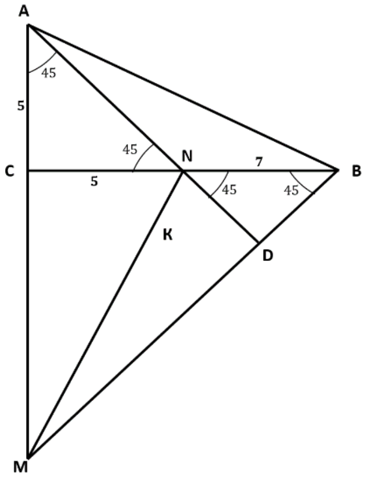
3. Аналогично в прямоугольном треугольнике HCB из того, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° следует, что $\angle HCB = 90° - \alpha$.

4. Из пункта 1 следует, что $\angle CAB = \angle CNM$, как соответственные углы в равных треугольниках, значит $\angle CNM = 90° - \alpha$.

5. $В$ прямоугольном треугольнике CNK из того, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° и $\angle CNM = 90° - \alpha$ следует, что $\angle NCK = \alpha$.

6. Тогда $\angle HCK = \angle HCB + \angle KCN = 90° - \alpha + \alpha = 90°$. Значит HC и CK перпендикулярны.

ч.т.д.



б) 1. Так как по условию $AC = CN$, то ΔACN – равнобедренный прямоугольный треугольник, а значит $\angle CAN = \angle CNA = 45°$.

2. $\angle CNA = \angle DNB = 45°$ по свойству вертикальных углов.

3. Так как по условию $BC = CM$, то ΔBCM – равнобедренный прямоугольный треугольник, а значит $\angle CMB = \angle CBM = 45°$.

4. По теореме о сумме углов треугольника $\angle NDB = 180 - \angle DNB - \angle CBM = 180 - 45° - 45° = 90°$. Значит $\Delta\, NDB$ – равнобедренный прямоугольный треугольник, а значит $DN = NB \cdot \cos\angle DNB = (BC - CN) \cdot \cos 45° = (12 - 5) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: б) $DN = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Задание 17.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{x^2+9x-7a}{3x^2+7ax-6a^2} = 0$ имеет ровно два различных решения.

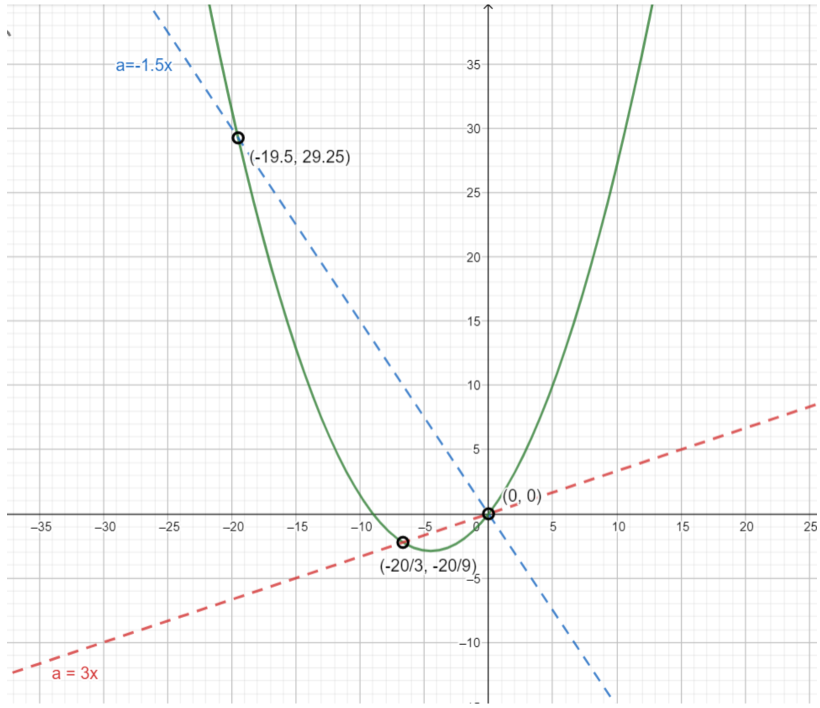
Решение:

$$\frac{x^2+9x-7a}{3x^2+7ax-6a^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x - 7a = 0 \\ 3x^2 + 7ax - 6a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x^2+9x}{7} \\ 3x^2 + 2ax - 9ax - 6a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = \frac{x^2+9x}{7} \\ x(3x + 2a) - 3a(3x + 2a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x^2+9x}{7} \\ (3x + 2a)(x - 3a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x^2+9x}{7} \\ 3x + 2a \neq 0 \\ x - 3a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x^2+9x}{7} \\ a \neq -\frac{3}{2}x \\ a \neq \frac{x}{3} \end{cases}$$

Изобразим решение системы в координатах системы xOa. Графиком будет являться парабола $a = \frac{x^2+9x}{7}$ с выколотыми точками.

Вершина параболы: $x_0 = -\frac{9}{7} \cdot \frac{7}{2} = -4{,}5$; $a_0 = \frac{(-4{,}5)^2 + 9 \cdot (-4{,}5)}{7} = -\frac{81}{28}$



Чтобы найти ординаты точек пересечения графиков $a = \frac{x^2+9x}{7}$ и $a = -\frac{3}{2}x$ нужно решить систему

$$\begin{cases} a = \frac{x^2+9x}{7} \\ a = -\frac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x^2+9x}{7} \\ x = -\frac{2}{3}a \end{cases}$$

Подставим выраженное значение x из второго уравнения в первое, получим:

$$a = \frac{\left(-\frac{2}{3}a\right)^2 + 9\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)}{7} \Leftrightarrow 7a = \frac{4a^2}{9} - \frac{18}{3}a \Leftrightarrow 63a = 4a^2 - 54a \Leftrightarrow 4a^2 - 63a - 54a = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 117a = 0 \Leftrightarrow a(4a - 117) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ 4a - 117 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 29{,}25 \end{array}\right..$$

Аналогично найдем ординаты точек пересечения графиков $a = \frac{x^2+9x}{7}$ и $a = \frac{x}{3}$, решив систему

$$\begin{cases} a = \frac{x^2+9x}{7} \\ a = \frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x^2+9x}{7} \\ x = 3a \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение значение x из второго и получим:

$$a = \frac{(3a)^2 + 9\cdot 3a}{7} \Leftrightarrow 7a = 9a^2 + 27a \Leftrightarrow 9a^2 + 27a - 7a = 0 \Leftrightarrow 9a^2 + 20a = 0 \Leftrightarrow a(9a + 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ 9a + 20 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -\frac{20}{9} \end{array}\right..$$

Ровно два различных решения исходное уравнение имеет тогда, когда прямая, параллельная оси абсцисс пересекает график ровно в двух точках, то есть при

$$a \in \left(-\frac{81}{28}; -\frac{20}{9}\right) \cup \left(-\frac{20}{9}; 0\right) \cup (0; 29{,}25) \cup (29{,}25; +\infty).$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{81}{28}; -\frac{20}{9}\right) \cup \left(-\frac{20}{9}; 0\right) \cup (0; 29{,}25) \cup (29{,}25; +\infty)$.

Задание 18.

Витя написал на доске несколько (не меньше двух) различных натуральных чисел, каждое из которых делится нацело на 3 и оканчивается на 2.

а) Может ли их среднее арифметическое делиться нацело на 11?

б) Может ли их сумма равняться 350?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть выписано на доску, если их среднее арифметическое является наименьшим возможным для данного количества чисел, но при этом превышает 1000?

Решение:

а) Да, может. Например, тройка чисел 72, 132, 192. Все они делятся нацело на 3 и оканчиваются на 2. Их среднее арифметическое $\frac{72 + 132 + 192}{3} = 132; 132 \vdots 11$.

б) Так как все числа делятся на 3, то и их сумма должна делиться на 3, но 350 на 3 не делится, а значит такого быть не может.

в) Если их среднее арифметическое является наименьшим возможном, то числа должны отличаться друг от друга минимально, а значит мы должны взять последовательность из подряд идущих чисел, удовлетворяющих условиям «делится на 3» и «оканчивается на 2». Эта последовательность: 12, 42, 72, 102 … Данная последовательность является арифметической с первым членом $a_1 = 12$ и арифметической разностью $d = 30$.

Найдем сумму арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$, тогда среднее арифметическое есть $S_a = \frac{S_n}{n} = \frac{a_1+a_n}{2}$, учитывая, что $a_n = a_1 + d(n-1)$, то есть в нашем случае $a_n = 12 + 30(n-1)$, получим $S_a = \frac{24+30(n-1)}{2} = \frac{24+30n-30}{2} = \frac{30n-6}{2} = 15n - 3$.

По условию среднее арифметическое превышает 1000, поэтому получим неравенство

$$15n - 3 > 1000 \Leftrightarrow 15n > 1003 \Leftrightarrow n > \frac{1003}{15} \Leftrightarrow n > 66\frac{13}{15}.$$

Тогда минимально возможное $n = 67$.

Ответ: а) да, например 72, 132 и 192; б) нет; в) 67