1 Найдите корень уравнения
$\sqrt{6+5x}=x$.
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из них.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2021
Пробный ЕГЭ 2014

$6+5x=x^2$
$x^2-5x-6=0$
$x=6$ $\quad$ $\cancel{x=-1}$

Ответ: 6

2 В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

Источники:
FIPI (старый банк)

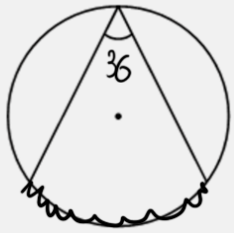
$\boxed{О О О О}$	Р Р Р Р
О О О Р	Р Р Р О
О О Р О	Р Р О Р
О Р О О	Р О Р Р
О О Р Р	Р Р О О
О Р О Р	Р О Р О
О Р Р О	Р О О Р
О Р Р Р	Р О О О

$P=\frac{1}{16}=0{,}0625$

Ответ: 0,0625

3

Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, равную $\frac{1}{5}$ окружности. Ответ дайте в градусах.



72°

343A64

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

Ответ: 36

4

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[5]{36}}{\sqrt[30]{36}}$.

68CF2D

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2017
Досрочная волна 2015

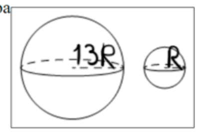
$$\frac{36^{\frac{1}{3}}\cdot 36^{\frac{1}{5}}}{36^{\frac{1}{30}}} = \frac{36^{\frac{10}{30}}\cdot 36^{\frac{6}{30}}}{36^{\frac{1}{30}}} = \frac{36^{\frac{16}{30}}}{36^{\frac{1}{30}}} = 36^{\cancel{\frac{15}{30}}\ \frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$$

Ответ: 6

5

Введите ответ в поле ввода

Дано два шара. Радиус первого шара в 13 раз больше радиуса второго. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?



Введите ответ

i **Номер: 4332** Статус задания: **НЕ РЕШЕНО** ОТВЕТИТЬ

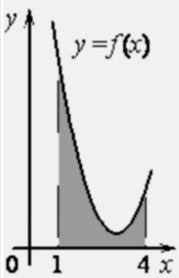
Источники:
FIPI (новый банк)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\cancel{\pi}(13R)^3}{\frac{4}{3}\cancel{\pi}R^3} = 2197$$

Ответ: 2197

6

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 14x - 10$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8F3609

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2013

$S_{\text{фигуры}} = F(4) - F(1)$

$F(4) = 64 \cdot \frac{1}{2} - 16 \cdot \frac{9}{2} + 4 \cdot 14 - \cancel{10}$

$-$

$F(1) = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{9}{2} + 1 \cdot 14 - \cancel{10}$

$= 63 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{9}{2} + 3 \cdot 14 = 31{,}5 - 67{,}5 + 42 = 6$

Ответ: 6

7

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды, а T — температура. Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{625} \cdot 10^{21}$ м^2, а мощность её излучения равна $5{,}7 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в градусах Кельвина.

047BBF

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2019
Досрочная волна 2014

$$T^4 = \frac{P}{\sigma \cdot S} = \frac{\cancel{5{,}7} \cdot 10^{25} \cdot 625}{\cancel{5{,}7} \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{\cancel{625}} \cdot 10^{21}} = 625 \cdot 10^{12}$$

$$T^4 = 5^4 \cdot 10^{\cancel{12}\,3}$$

$$T = 5000$$

Ответ: 5000

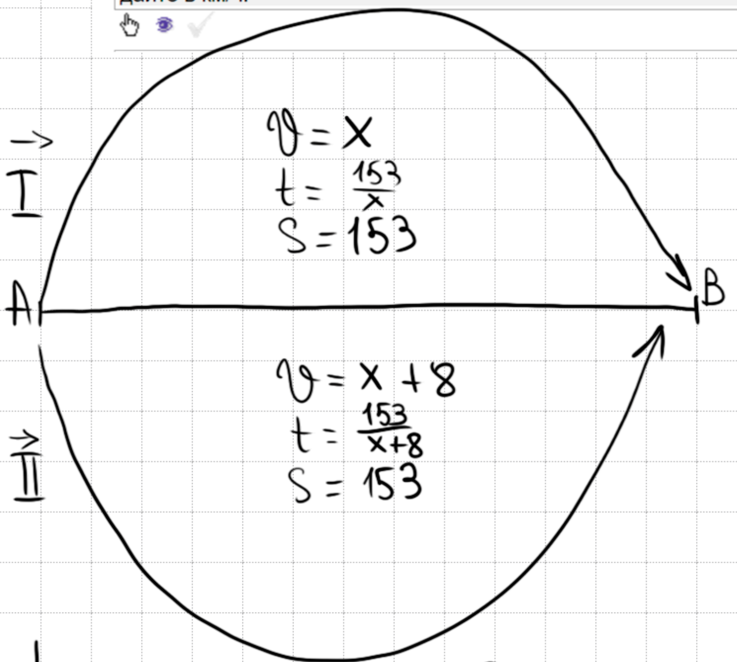
8

От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 153 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним со скоростью на 8 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

E5DDDD

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)



$t_{медл} - t_{быстр} = 8$

$$\frac{153}{x} - \frac{153}{x+8} = 8$$

$$\frac{\cancel{153x} + 153 \cdot 8 - \cancel{153x}}{x^2 + 8x} = 8$$

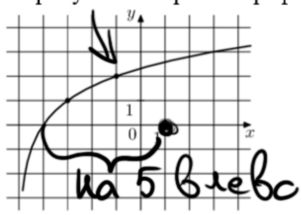
$$x^2 + 8x - 153 = 0$$

$\cancel{x = -17}$ $\quad x = 9$

Ответ: 9

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 4$.

Источники:
Mathege



① $y = \log_a(x+5)$

② $2 = \log_a(4)$

$a^2 = 4$

$a = 2$

$y = \log_2(x+5)$

③ $4 = \log_2(x+5)$ $\qquad 16 = x+5$

Ответ: 11

10 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Источники:
Только MATHEGE

P (оба сломались) $= 0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$

1

$1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$

Ответ: 0,9975

11 Найдите точку минимума функции
$y = (3x^2 - 42x + 42)\cdot e^{7-x}$.

Источники:
Основная волна 2017
Досрочная волна 2014

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$
$x' = 1$
$(Cx)' = C$
$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(U\cdot V)' = U'V + UV'$
$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
$(U(V))' = (U(V))'\cdot V'$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x\cdot\ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a b)' = \frac{1}{b\cdot\ln a}$

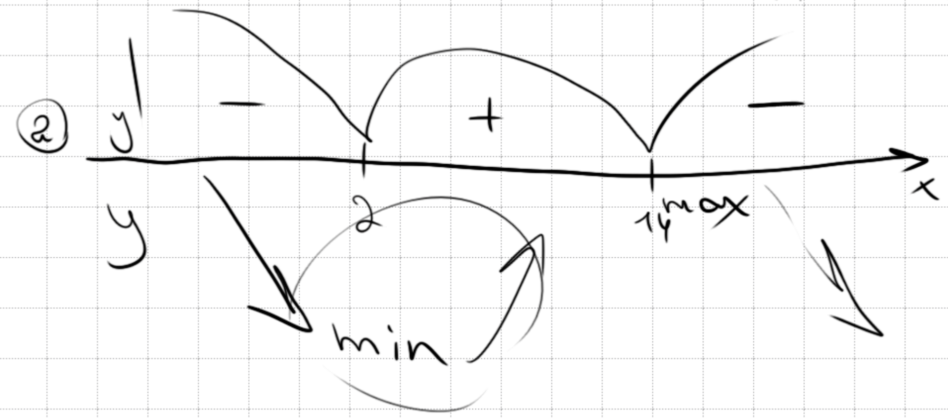
① $y' = (6x-42)\cdot e^{7-x} - (3x^2-42x+42)\cdot e^{7-x}\cdot\cancel{(7-x)'}$

$e^{7-x}\cdot(6x-42-3x^2+42x-42) = 0$

$e^{7-x} = 0$ $\qquad -3x^2+48x-84=0 \quad |\cdot(-1)$

$\varnothing$ $\qquad x^2-16x+28=0$

$x=14 \qquad x=2$

② 

Ответ: 2

12 а) Решите уравнение
$$1+\log_2(9x^2+5) = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}.$$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1;\frac{8}{9}\right]$.

Источники:
FIPI (старый банк)
Семёнов 2015
Основная волна (Резерв) 2013

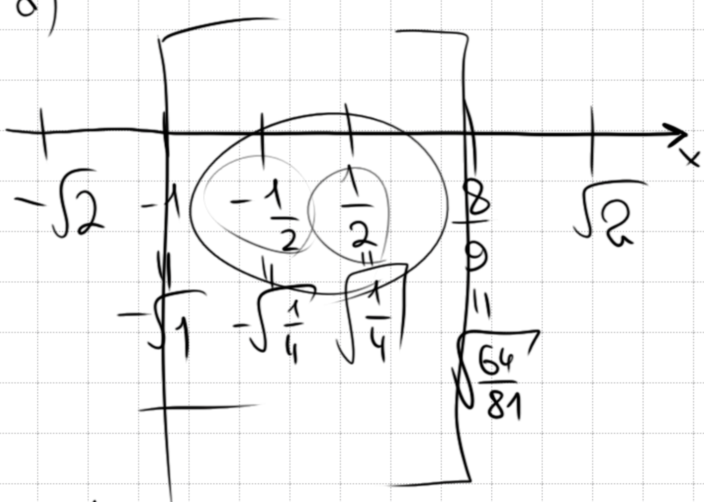
а) $\log_2 2 + \log_2(9x^2+5) = \log_2(8x^4+14)$

$\log_2(18x^2+10) = \log_2(8x^4+14)$

$8x^4+14-18x^2-10=0$
$8x^4-18x^2+4=0 \quad |:2$
$4x^4-9x^2+2=0$
Пусть $x^2=t$
$4t^2-9t+2=0$
$D = 81-32=49$
$t=\frac{9\pm7}{8}$
$t_1=2 \qquad t_2=\frac{1}{4}$

$x^2=2$
$x=\pm\sqrt{2}$

$x^2=\frac{1}{4}$
$x=\pm\frac{1}{2}$

б) 

$\pm\frac{1}{2} \in$

Ответ: а) $\pm\sqrt{2};\ \pm\frac{1}{2}$
б) $\pm\frac{1}{2}$

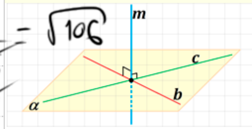
13

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

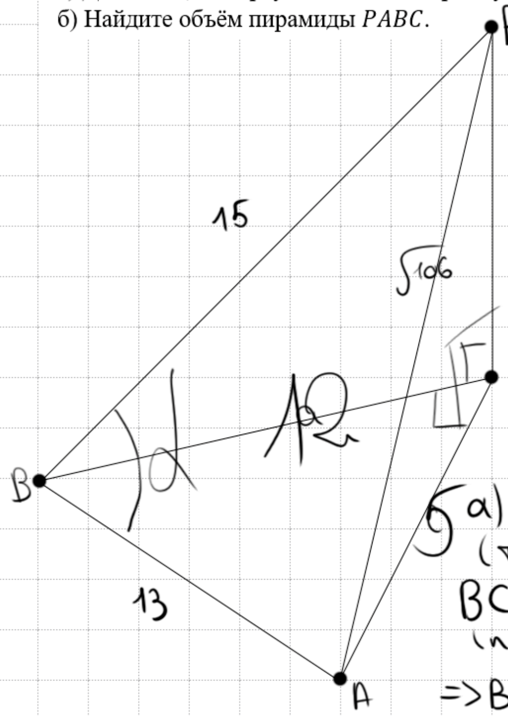
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите объём пирамиды $PABC$.

Источники:
Гордин #14 2019
Основная волна (Резерв) 2017

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости



а) $BC \perp PC$ (т.к. PC - высота)
$BC \perp PA$ (по усл.)
$\Rightarrow BC \perp (PAC)$
$\Rightarrow BC \perp AC$
$\Rightarrow \angle BCA = 90°$

б) по т. cos

① $AP = \sqrt{15^2 + 13^2 - 2 \cdot \cancel{15} \cdot \cancel{13} \cdot \frac{48}{65}} = \sqrt{106}$

② $\triangle ABC: \ 169 = a^2 + c^2$
$\triangle PBC: \ 225 = a^2 + b^2$
$\triangle PAC: \ 106 = b^2 + c$

$$+\begin{cases} 56 = b^2 - c^2 \\ 106 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

$162 = 2b^2 \qquad b^2 = 81 \qquad b = 9$

$a = 12$
$c = 5$

③ $V_{PABC} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{12 \cdot 5}{\cancel{2}} \cdot \cancel{9} = 90$

Ответ: 9 0

14

Решите неравенство
$$\frac{\log_3 x}{\log_3\left(\frac{x}{27}\right)} \geq \frac{4}{\log_3 x} + \frac{8}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}.$$

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Основная волна 2017

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 x - \log_3 27} \geq \frac{4}{\log_3 x} + \frac{8}{\log_3^2 x - 3\log_3 x}$$

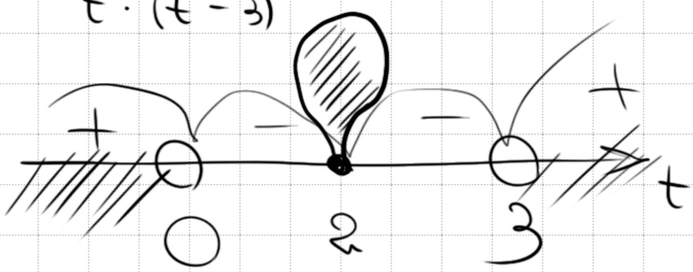
Пусть $\log_3 x = t$

$$\frac{t^{(t}}{t-3} - \frac{4^{(t-3}}{t} - \frac{8}{t^2 - 3t} \geq 0$$

$$\frac{t^2 - 4t + 12 - 8}{t^2 - 3t} \geq 0$$

$$\frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 - 3t} \geq 0$$

$$\frac{(t-2)^2}{t \cdot (t-3)} \geq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t < 0 \\ t = 2 \\ t > 3 \end{array}\right.$$

$\log_3 x < \log_3 1 \qquad \log_3 x = \log_3 9 \qquad \log_3 x > \log_3 27$
$0 < x < 1 \qquad x = 9 \qquad x > 27$

Ответ: $(0;1) \cup \{9\} \cup (27;+\infty)$

15

Задание с развернутым ответом

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Какой долг будет 15-го числа 10-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1198 тысяч рублей?

Номер: 5103

Источники:
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018

Пусть S – сумма долга
7 число – день платежа

Дата	Сумма долга	
15 дек	S	
1 мес: 1	1,03S	
7	=> была выплата	0,03S + 80
15	S − 80	
2 мес: 1	1,03S − 82,4	
7	=> была выплата	0,03S + 77,6
15	S − 160	
3 мес: 1	1,03S − 164,8	
7	=> Е.В.	0,03S + 75,2
15	S − 240	
9 м: 15	S − 720	
10 мес: 1	1,03S − 741,6	
7	=> Е.В.	0,03S + 58,4
15	$\boxed{S-800}$	
11 мес: 1	1,03S − 824	
7	=> Е.В.	$\boxed{1,03S-824}$
15	0	

Ответ: 200 тыс

Первые 10 платежей образ. арифм. прогр.
Воспользуемся ф-лой

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$О.С.В = 1198$$

$$\left(\frac{0{,}03S + 80 + 0{,}03S + 58{,}4}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{10}^{5} + 1{,}03S - 824 = 1198$$

$$(0{,}06S + 138{,}4) \cdot 5 + 1{,}03S = 2022$$

$$0{,}3S + 692 + 1{,}03S = 2022$$

$$1{,}33S = 1330$$

$$S = 1000$$

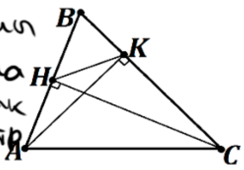
$$S - 800 = 200 \text{ тыс}$$

16 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
б) Найдите BC, если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60°$.

Источники:
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2014

ПОДОБИЕ ABC и HBK

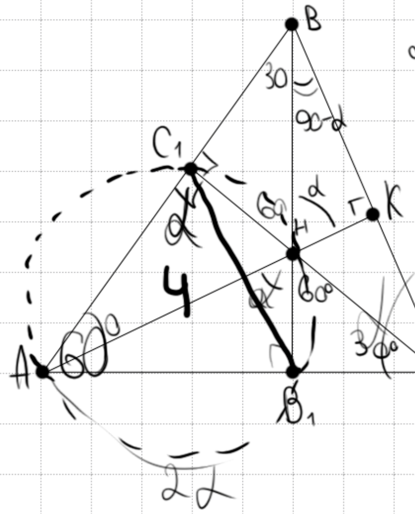


$\cos B = \frac{BK}{AB}$

$\cos B = \frac{BH}{BC}$

$\Delta ABC \sim \Delta HBK$ по 2 признаку

$\left(\frac{BK}{AB} = \frac{BH}{BC}\right.$ и угол B – общий$\left.\right)$



а) Пусть $\angle AHB_1 = \alpha$

Тогда $\angle BHK = \alpha$ (вертикальные)

$\angle HBK = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$

② ΔBB_1C:

$\angle ACB = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$

$= \angle AHB_1$

б) ① $\angle AC_1H = 90°$ – эти углы опираются на отрезок AH как на диаметр

$\angle AB_1H = 90°$

$\Rightarrow$ Можно описать окр-ть около AC_1HB_1

② по т. sin ΔAB_1C_1:

$$\frac{B_1C_1}{\sin 60°} = 4$$

$$B_1C_1 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

③ $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$ по 2 углам

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \cos 60°$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{BC} = \frac{1}{2} \qquad BC = 4\sqrt{3}$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$|x^2-2ax+7|=|6a-x^2-2x-1|$

имеет более двух различных корней.

78A5D4

Источники:

FIPI (старый банк)

Основная волна 2014

$$\sqrt{(x^2-2ax+7)^2}=\sqrt{(6a-x^2-2x-1)^2}$$

$$(x^2-2ax+7)^2-(6a-x^2-2x-1)^2=0$$

$$(x^2-2ax+7-6a+x^2+2x+1)(\cancel{x^2}-2ax+7+6a-\cancel{x^2}-2x-1)=0$$

$$(2x^2-2ax+2x+8-6a)(-2ax-2x+6+6a)=0$$

$$(x^2-ax+x+4-3a)(-ax-x+3+3a)=0$$

$$(x^2-ax+x+4-3a)(-x\cdot(a+1)+3\cdot(a+1))=0$$

$x\cdot(-1-a)$

$$(x^2-ax+x+4-3a)(a+1)(3-x)=0$$

$x_2=$ $x_3=$ $x_1=3$

Если $a=-1$, то корней беск. много

Если $a\neq-1$, то корней уравнения может быть макс. 3

3 корня будет только если кв. ур-е будет иметь 2 разл. корня и оба они не равны 3

$$\begin{cases} D>0 \\ 3^2-a\cdot3+3+4-3a\neq0 \end{cases}$$

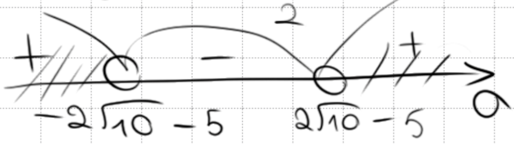
$$\begin{cases} (1-a)^2-4\cdot1\cdot(4-3a)>0 & (1) \\ 6a\neq16 & (2) \end{cases}$$

(1) $1-2a+a^2-16+12a>0$

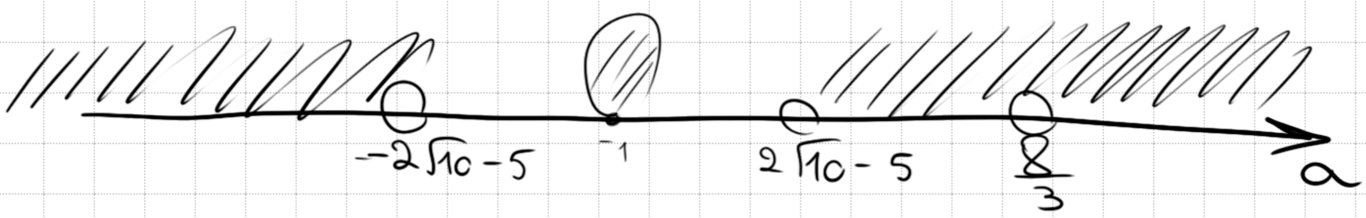
$a^2+10a-15>0$

$D=160$

$a=\dfrac{-10\pm4\sqrt{10}}{2}$



(2) $a\neq\dfrac{8}{3}$



Ответ: $(-\infty;-2\sqrt{10}-5)\cup\{-1\}\cup(2\sqrt{10}-5;\frac{8}{3})\cup(\frac{8}{3};+\infty)$

18

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

EC9829

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2017

Д2

а) 6 7 8 9 10

б) $\overline{a}_1 < \overset{\geq 7}{\overline{a}_2} < a_3 < \overline{a}_4 < \overset{\leq 9}{\overline{a}_5} < \overline{a}_6$

Для a_3 и a_4 нет двух подходящих чисел, только 8 на 2 потенциальные позиции

$\Rightarrow$ не может

в) $\underset{max}{7}$ $\underset{max}{8}$ $\underset{max}{9}$ $\underset{max}{11}$

Выпишите все комбинации

Ответ:

а)	6 7 8 9 10
б)	нет
в)	35