

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

10	-	0	,	8															
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1** Найдите корень уравнения

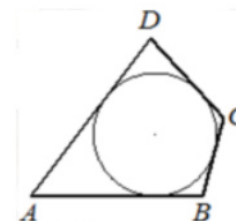
$$(x + 4)^3 = -125.$$

Ответ: _____.

- 2** В параллели 51 учащийся, среди них два друга – Михаил и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Михаил и Сергей окажутся в одной группе.

Ответ: _____.

- 3** В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 22$, $CD = 17$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



Ответ: _____.

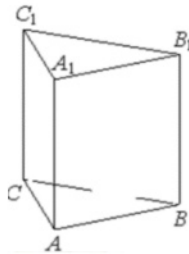


4 Найдите значение выражения

$$0,8^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 20^{\frac{6}{7}}.$$

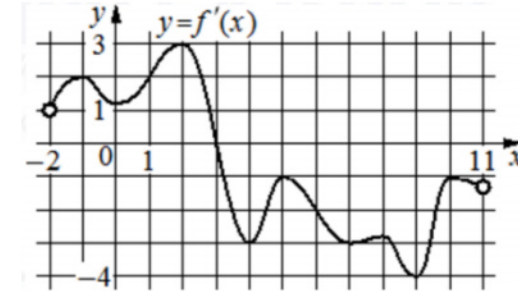
Ответ: _____.

5 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, C, A_1, B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Площадь основания призмы равна 9, а боковое ребро равно 4.



Ответ: _____.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 11)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: _____.

7 Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 – давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 – объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 316,8 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

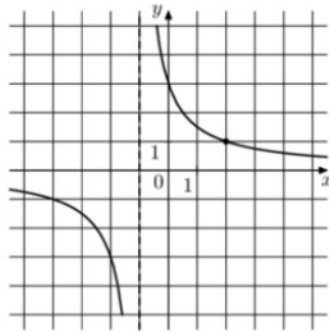
Ответ: _____.

8 Дорога между пунктами А и В состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 25 км. Путь из А в В занял у туриста 6 часов, из которых 1 час ушёл на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.



- 9 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 0,2$.



Ответ: _____.

- 10 Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 2 раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Ответ: _____.

- 11 Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 11x + 11) \cdot e^{x+13}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12 а) Решите уравнение

$$8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 20]$.

- 13 Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K – середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
 б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

- 14 Решите неравенство

$$\frac{\log_4(16x^4) + 11}{\log_4^2 x - 9} \geq -1.$$

- 15 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?



16 В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O .

- а) Докажите, что $\sin \angle AOD = \sin \angle BOC$.
б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

17 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4 y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2 y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

18 На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.

- а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?
б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	-9
2	0,32
3	78
4	20
5	12
6	3
7	9,9
8	5
9	14
10	0,04
11	9
12	а) $2; \frac{1}{2}$ б) $\frac{1}{2}$
13	26
14	$(0; \frac{1}{64}) \cup \{\frac{1}{16}\} \cup (64; +\infty)$
15	4
16	35
17	1
18	а) да б) нет в) б

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 а) Решите уравнение $8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 2; \log_5 20]$.

Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 ЕГЭ (новый банк)
 Досрочная волна 2017

а) $8^x - 9 \cdot 2^x \cdot 2 + \frac{2^5}{2^x} = 0$
 $\frac{16^x - 18 \cdot 4^x + 32}{2^x} = 0$
 $16^x - 18 \cdot 4^x + 32 = 0$
 Пусть $4^x = t$
 $t^2 - 18t + 32 = 0$
 $t = 16$ $t = 2$
 $4^x = 4^2$ $4^x = 2$
 $x = 2$ $x = \frac{1}{2}$

б) $2 = \log_5 25$
 $\frac{1}{2} = \log_5 \sqrt{5}$

$\Rightarrow \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \in [\log_2 2, \log_5 20]$
 $\log_5 25 = 2 \in [\log_2 2, \log_5 20]$

ОТВЕТ: а) $2; \frac{1}{2}$
 б) $\frac{1}{2}$

13 Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K – середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
 б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

Источники:
 Досрочная волна (Резерв) 2015

а) Построим сечение:
 ① $C_1 K$
 ② Плоскость $LK \parallel BD_1$
 $L \in (A_1 B_1 C_1)$
 LK – ср. линия $\triangle A_1 B_1 C_1$
 L – точка пересечения $A_1 B_1$ и $A_1 C_1$
 ③ $C_1 L$
 ④ $C_1 A_1$
 ⑤ $A_1 K$
 $A_1 C_1 K$ – сечение

б) $\triangle A_1 B_1 K = \triangle C_1 B_1 K$ по СЗС
 $(A_1 B_1 = B_1 C_1, \angle B_1 K A_1 = \angle B_1 K C_1 = 90^\circ)$
 $\Rightarrow A_1 K = C_1 K$

① $A_1 K = C_1 K = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + 5^2} = 8$
 $A_1 C_1 = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = 10$
 $P = 10 + 8 + 8 = 26$

ОТВЕТ: 26

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3



16 В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O .
 а) Докажите, что $\sin \angle AOD = \sin \angle BOC$.
 б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

Источники:
 Основы геометрии (Резур) 2017
 Основы геометрии 2015
 Свойства касательных

а) BO, CO, DO и AO - биссектрисы (по св-ву кас.)
 Пусть $\angle ABO = \alpha = \angle CBO$
 $\angle BAO = \beta = \angle OAD$
 $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$
 $\alpha + \beta = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$
 Аналогично $\angle COD = 90^\circ$

② $\angle AOD + \angle BOC = 360 - 90 - 90$
 Пусть $\angle BOC = \gamma$
 Тогда $\angle AOD = 180 - \gamma$
 $\sin \gamma = \sin(180 - \gamma)$
 $\Rightarrow \sin \angle AOD = \sin \angle BOC$

б) Пусть R - радиус ОКР-ти
 Тогда $CL = CM = 5 - R$
 $DM = DN = 7 - R$

Острые касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

ВЫСОТА

$h^2 = de$

③ $S = \frac{5+7}{2} \cdot \frac{35}{6} = 35$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ	1

при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	3
Максимальный балл	

17 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|} \\ \log_2(x^2 y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2 y^2) + 1 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

Источники:
 Досрочная волна 2021

Заметим, что если $(x; y)$ - решение системы, то $(-x; y)$ - тоже
 \Rightarrow Единственное решение может быть только если $x=0$

Если $x=0$, то $2^{\ln y} = 4^0 = 1$
 $2^{\ln y} = 2^0$
 $\ln y = 0$
 $y = 1$

$(0; 1)$ - решение первого уравнения

Если $y=1$, то $\log_2 2a^2 = \log_2 1 + 1$
 $\log_2 2a^2 = \log_2 2$
 $2a^2 = 2$
 $a = \pm 1$

Проверим $a=1$

① $2^{\ln y} = 4^{|x|}$
 ② $\log_2(x^2 y^2 + 2) = \log_2(1 - x^2 y^2) + 1$
 $\log_2(x^2 y^2 + 2) = \log_2(2 - 2x^2 y^2)$
 $x^4 y^2 + 2 = 2 - 2x^2 y^2$
 $x^4 y^2 + 2x^2 y^2 = 0$
 $x^2 y^2 \cdot (x^2 + 2) = 0$
 $x^2 \cdot y^2 = 0$

ОТВЕТ: 1

Проверим $a=-1$
 $\log_2(x^2 y^2 + 2) = \log_2(1 + x^2 y^2) + 1$
 $(x^2 y^2 + 2) = 2 + 2x^2 y^2$
 $x^2 y^2 \cdot (x^2 - 2) = 0$
 $x = \sqrt{2} \quad y = \dots$
 $x = -\sqrt{2} \quad y = \dots$
 $x = 0 \quad y = \dots$
 3 решения

$X=0$
 Подставим $x=0$ в ур. ①
 $2^{\ln y} = 4^0 = 1$
 $2^{\ln y} = 2^0$
 $\ln y = 0$
 $y = 1$
 \Rightarrow при $a=1$, $(0; 1)$ - единств. реш. $x=0$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

18 На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.

Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 ЕГЭ (новый банк)
 Ященко 2021 (36 вар)
 Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2019 (36 вар)
 Основания 2017

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?
 б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
 в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

а) $3 \quad 13 \quad 23 \quad 33 \quad 43 \quad 53 \quad 63 \quad 73$
 $\frac{3+73}{2} \cdot 8 = 304$
 Осталось найти 1062 - 304 = 758
 с помощью 27 чётных чисел.
 $\frac{2+52}{2} \cdot 26 = 702$
 \Rightarrow Последнее число это 56
 \Rightarrow Ответ: а) да

б) Тогда будет 33 чётных числа
 $33 \text{ чётных числа} + \dots 3 + \dots 3$
 $S_{\min} = \frac{2+66}{2} \cdot 33 + 3 + 13 =$
 $= 1122 + 16 = 1138$
 $1138 > 1062$
 \Rightarrow нет

в) Если таких чисел < 3 , то будет превышена сумма 1062
 Если чисел 3, то
 $32 \text{ чётных} + \dots 3 + \dots 3 + \dots 3$
 \Rightarrow такая сумма будет нечётной, а не 1062

Если чисел 4
 $S_{\min} = 31 \text{ чётное} + 3 + 13 + 23 + 33$
 $\frac{2+62}{2} \cdot 31 + 42 = 1054$ Перебор

Если чисел 5, то сумма кет.
 Если чисел 6, то

$3 \quad 13 \quad 23 \quad 33 \quad 43 \quad 53$
 $\frac{2+56}{2} \cdot 28 = 812 + 82$

168

от 2 до 56
 28 чётных
 82

ОТВЕТ: а) Да
 б) нет
 в) 6

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта a ; – обоснованное решение пункта b ; – искомая оценка в пункте b ; – пример в пункте b , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

