

Вариант 1

1. Сократите дробь $\frac{21x^8y^{12}}{14x^4y^{24}}$.
2. Представьте в виде степени выражение $(a^{-2})^6 : a^{-15}$.
3. Упростите выражение $\sqrt{16a} - \sqrt{64a} + \sqrt{100a}$.
4. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\frac{x-1}{2x^2-5x+2}$?
5. Докажите тождество $\frac{3}{2a-3} - \frac{8a^3-18a}{4a^2+9} \cdot \left(\frac{2a}{4a^2-12a+9} - \frac{3}{4a^2-9} \right) = -1$.
6. Тракторист должен был за определённое время вспахать поле площадью 180 га. Однако ежедневно он вспахивал на 2 га больше, чем планировал, и закончил работу на день раньше срока. За сколько дней тракторист вспахал поле?
7. Докажите, что при любом значении p уравнение $x^2 + px + p - 1 = 0$ имеет хотя бы один корень.
8. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Вариант 2

1. Сократите дробь $\frac{12a^{10}b^2}{16a^5b^6}$.
2. Представьте в виде степени выражение $(a^{-3})^{-4} : a^{20}$.
3. Упростите выражение $\sqrt{36a} - \sqrt{81a} + \sqrt{121a}$.
4. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\frac{x+2}{x^2+3x-4}$?
5. Докажите тождество $\left(\frac{2a}{a+3} - \frac{4a}{a^2+6a+9} \right) : \frac{a+1}{a^2-9} - \frac{a^2-9a}{a+3} = a$.
6. Вместо автомобиля определённой грузоподъёмности для перевозки 45 т груза взяли другой автомобиль, грузоподъёмность которого на 2 т меньше, чем у первого. Из-за этого для перевозки груза понадобилось на 6 рейсов больше, чем планировалось. Найдите грузоподъёмность автомобиля, перевёзшего груз.
7. Докажите, что при любом значении p уравнение $x^2 + px + p - 3 = 0$ имеет два корня.
8. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

Вариант 3

1. Сократите дробь $\frac{48x^6y^2}{40x^3y^4}$.
2. Представьте в виде степени выражение $(b^{-4})^{-2} : b^{11}$.
3. Упростите выражение $\sqrt{9y} + \sqrt{25y} - \sqrt{144y}$.
4. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\frac{x-5}{x^2-4x-21}$?
5. Докажите тождество $\frac{1}{3b-1} - \frac{27b^3-3b}{9b^2+1} \cdot \left(\frac{3b}{9b^2-6b+1} - \frac{1}{9b^2-1} \right) = -1$.
6. Рабочий должен был за определённое время изготовить 160 деталей. Однако ежедневно рабочий изготавливал на 4 детали больше, чем планировал, и закончил работу на 2 дня раньше срока. За сколько дней он выполнил работу?
7. Докажите, что при любом значении p уравнение $x^2 + px + p^2 + 2 = 0$ не имеет корней.
8. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Вариант 4

1. Сократите дробь $\frac{36x^2y^{10}}{24x^{14}y^5}$.
2. Представьте в виде степени выражение $(c^{-5})^3 : c^{-19}$.
3. Упростите выражение $\sqrt{49x} - \sqrt{4x} + \sqrt{169x}$.
4. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\frac{x+6}{2x^2-3x-2}$?
5. Докажите тождество $\left(\frac{3b}{b-2} - \frac{6b}{b^2-4b+4} \right) : \frac{b-4}{b^2-4} - \frac{2b^2+8b}{b-2} = b$.
6. Вместо автомобиля определённой грузоподъёмности для перевозки 30 т груза взяли другой автомобиль, грузоподъёмность которого на 2 т больше, чем у первого. Благодаря этому для перевозки груза понадобилось на 4 рейса меньше, чем планировалось. Найдите грузоподъёмность автомобиля, перевёзшего груз.
7. Докажите, что при любом значении p уравнение $x^2 + 2px + p^2 - 1 = 0$ имеет два корня.
8. Постройте график функции $y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{если } x \leq -2, \\ x^2, & \text{если } x > -2. \end{cases}$

Решения и Ответы на Вариант 1

№ 1. Сократите дробь $(21x^8y^{12}) / (14x^4y^{24})$.

ОТВЕТ:

$$\frac{21x^8y^{12}}{14x^4y^{24}} = \frac{3x^4}{2y^{12}}$$

№ 2. Представьте в виде степени выражение $(a^{-2})^6 : a^{-15}$.

ОТВЕТ:

$$(a^{-2})^6 : a^{-15} = a^{-12} : a^{-15} = a^3.$$

№ 3. Упростите выражение $\sqrt{[16a]} - \sqrt{[64a]} + \sqrt{[100a]}$.

ОТВЕТ:

$$\begin{aligned} \sqrt{16a} - \sqrt{64a} + \sqrt{100a} &= \\ &= 4\sqrt{a} - 8\sqrt{a} + 10\sqrt{a} = 6\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Решения и Ответы на Вариант 2

№ 1. Сократите дробь $(12a^{10}b^2) / (16a^5b^6)$.

ОТВЕТ:

$$\frac{12a^{10}b^2}{16a^5b^6} = \frac{3a^5}{4b^4}.$$

№ 2. Представьте в виде степени выражение $(a^{-3})^{-4} : a^{20}$.

ОТВЕТ:

$$(a^{-3})^{-4} : a^{20} = a^{12} : a^{20} = a^{-8}.$$

№ 3. Упростите выражение $\sqrt{[36a]} - \sqrt{[81a]} + \sqrt{[121a]}$.

ОТВЕТ:

$$\begin{aligned}\sqrt{36a} - \sqrt{81a} + \sqrt{121a} &= \\ &= 6\sqrt{a} - 9\sqrt{a} + 11\sqrt{a} = 8\sqrt{a}.\end{aligned}$$

№ 4. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $(x + 2)/(x^2 + 3x - 4)$?

ОТВЕТ:

$$\frac{x + 2}{x^2 + 3x - 4}$$

$$x^2 + 3x - 4 \neq 0$$

$$x_1 + x_2 = -3; \quad x_1 \cdot x_2 = -4$$

$$x_1 = -4; \quad x_2 = 1.$$

$$D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; 1) \cup (1; +\infty).$$

№ 5. Докажите тождество $(2a/(a + 3) - 4a/(a^2 + 6a + 9)) : (a + 1)/(a^2 - 9) - (a^2 - 9a)/(a + 3) = a$.

Смотреть РЕШЕНИЕ задачи № 5 в тетради

$$\left(\frac{2a}{a+3} - \frac{4a}{a^2+6a+9} \right) : \frac{a+1}{a^2-9} - \frac{a^2-9a}{a+3} = a$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$1) \frac{2a}{a+3} - \frac{4a}{(a+3)^2} = \frac{2a^2+6a-4a}{(a+3)^2} =$$

$$= \frac{2a^2+2a}{(a+3)^2} = \frac{2a(a+1)}{(a+3)^2}$$

$$2) \frac{2a(a+1)}{(a+3)^2} \cdot \frac{a^2-9}{a+1} = \frac{2a(a-3)(a+3)}{(a+3)^2} =$$

$$= \frac{2a(a-3)}{a+3}$$

$$3) \frac{2a(a-3)}{a+3} - \frac{a^2-9a}{a+3} = \frac{2a^2-6a-a^2+9a}{a+3} =$$

$$= \frac{a^2+3a}{a+3} = \frac{a(a+3)}{a+3} = a$$

$$a = a$$

Что и требовалось доказать.

№ 6. Вместо автомобиля определённой грузоподъёмности для перевозки 45 т груза взяли другой автомобиль, грузоподъёмность которого на 2 т меньше, чем у первого. Из-за этого для перевозки груза понадобилось на 6 рейсов больше, чем планировалось. Найдите грузоподъёмность автомобиля, перевёзшего груз.

ОТВЕТ: 3 тонны.

Смотреть РЕШЕНИЕ задачи № 6 в тетради

Пусть x т — грузоподъемность 1 машины;

$(x - 2)$ т — грузоподъемность 2 машины.

$\frac{45}{x}$ — рейсов сделала бы 1 машина;

$\frac{45}{x - 2}$ — рейсов делает 2 машина.

По условию известно, что рейсов
сделано на 6 больше.

Составляем уравнение:

$$\frac{45}{x - 2} - \frac{45}{x} = 6$$

$$45x - 45x + 90 - 6x^2 + 12x = 0$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 2; x \neq 0.$$

$$-6x^2 + 12x + 90 = 0 \quad | : (-6)$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = -15$$

$$x_2 = -3 \implies \text{не удовлетворяет.}$$

$$x_2 = 5 \text{ (тонн) — грузоподъемность}$$

1 машины.

$$5 - 2 = 3 \text{ (тонны) — грузоподъемность}$$

2 машины.

Ответ: 3 тонны.

№ 7. Докажите, что при любом значении p уравнение $x^2 + px + p - 3 = 0$ имеет два корня.

ОТВЕТ:

$$x^2 + px + p - 3 = 0$$

Уравнение имеет два корня при $D > 0$.

$$\begin{aligned} D &= p^2 - 4 \cdot (p - 3) = p^2 - 4p + 12 = \\ &= p^2 - 4p + 4 + 8 = (p - 2)^2 + 8 > 0 - \end{aligned}$$

при любом значении p .

Что и требовалось доказать.

Решения и Ответы на Вариант 3

№ 1. Сократите дробь $(48x^6y^2)/(40x^3y^4)$.

ОТВЕТ:

$$\frac{48x^6y^2}{40x^3y^4} = \frac{6x^3}{5y^2}.$$

№ 2. Представьте в виде степени выражение $(b^{-4})^{-2} : b^{11}$.

ОТВЕТ:

$$(b^{-4})^{-2} : b^{11} = b^8 : b^{11} = b^{-3}.$$

№ 3. Упростите выражение $\sqrt{9y} + \sqrt{25y} - \sqrt{144y}$.

ОТВЕТ:

$$\begin{aligned} \sqrt{9y} + \sqrt{25y} - \sqrt{144y} &= \\ &= 3\sqrt{y} + 5\sqrt{y} - 12\sqrt{y} = -4\sqrt{y}. \end{aligned}$$

№ 4. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $(x - 5)/(x^2 - 4x - 21)$?

ОТВЕТ:

$$\frac{x - 5}{x^2 - 4x - 21}$$

$$x^2 - 4x - 21 \neq 0$$

$$x_1 + x_2 = 4; \quad x_1 \cdot x_2 = -21$$

$$x_1 = 7; \quad x_2 = -3.$$

$$D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 7) \cup (7; +\infty).$$

№ 5. Докажите тождество $\frac{1}{3b - 1} - \frac{27b^3 - 3b}{9b^2 + 1} \cdot \left(\frac{3b}{9b^2 - 6b + 1} - \frac{1}{9b^2 - 1} \right) - \frac{1}{9b^2 - 1} = -1$.

Смотреть РЕШЕНИЕ задачи № 5 в тетради

$$\frac{1}{3b - 1} - \frac{27b^3 - 3b}{9b^2 + 1} \cdot \left(\frac{3b}{9b^2 - 6b + 1} - \frac{1}{9b^2 - 1} \right) = -1$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} 1) \frac{3b^{3b+1}}{(3b - 1)^2} - \frac{1^{3b-1}}{(3b - 1)(3b + 1)} &= \\ &= \frac{9b^2 + 3b - 3b + 1}{(3b - 1)^2(3b + 1)} = \frac{9b^2 + 1}{(3b - 1)^2(3b + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{3b(9b^2 - 1)}{9b^2 + 1} \cdot \frac{9b^2 + 1}{(3b - 1)^2(3b + 1)} &= \\ &= \frac{3b(9b^2 - 1)}{(9b^2 - 1)(3b - 1)} = \frac{3b}{3b - 1} \end{aligned}$$

$$3) \frac{1}{3b - 1} - \frac{3b}{3b - 1} = \frac{1 - 3b}{3b - 1} = -1$$

$$-1 = -1$$

Что и требовалось доказать.

№ 6. Рабочий должен был за определённое время изготовить 160 деталей. Однако ежедневно рабочий изготавливал на 4 детали больше, чем планировал, и закончил работу на 2 дня раньше срока. За сколько дней он выполнил работу?

ОТВЕТ: 8 дней.

Смотреть РЕШЕНИЕ задачи № 6 в тетради

Пусть x деталей – в день должен был
изготавливать рабочий; тогда

$(x + 4)$ детали – в день он делал.

Составим уравнение:

$$\frac{160}{x} - \frac{160}{x + 4} = 2; \quad x \neq 0; \quad x \neq -4$$

$$160(x + 4) - 160x = 2x(x + 4)$$

$$160x + 640 - 160x = 2x^2 + 8x$$

$$2x^2 + 8x - 640 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 + 4x - 320 = 0$$

$$D_1 = 4 + 320 = 324$$

$$x_1 = -2 - 18 = -20 \text{ (не подходит).}$$

$$x_2 = -2 + 18 = 16 \text{ (деталей) – в день}$$

должен был делать рабочий.

$$\frac{160}{x + 4} = \frac{160}{20} = 8 \text{ (дней) – выполнил}$$

работу.

Ответ: за 8 дней.

№ 7. Докажите, что при любом значении p уравнение $x^2 + px + p^2 + 2 = 0$ не имеет корней.

ОТВЕТ:

$$x^2 + px + p^2 + 2 = 0$$

Уравнение не имеет корней при $D < 0$.

$$D = p^2 - 4 \cdot (p^2 + 2) = p^2 - 4p^2 - 8 =$$

$$= -3p^2 - 8 = -(3p^2 + 8) < 0 \text{ — при}$$

любом значении p .

Что и требовалось доказать.

№ 8. Постройте график функции $y =$

$\{ x^2, \text{ если } x \leq 1,$

$\{ \sqrt{x}, \text{ если } x > 1.$

Решения и Ответы на Вариант 4

№ 1. Сократите дробь $(36x^2y^{10})/(24x^{14}y^5)$.

ОТВЕТ:

$$\frac{36x^2y^{10}}{24x^{14}y^5} = \frac{3y^5}{2x^{12}}.$$

№ 2. Представьте в виде степени выражение $(c^{-5})^3 : c^{-19} : c^{-19} : c^{-19}$.

ОТВЕТ:

$$(c^{-5})^3 : c^{-19} = c^{-15} : c^{-19} = c^4.$$

№ 3. Упростите выражение $\sqrt{49x} - \sqrt{4x} + \sqrt{169x}$.

ОТВЕТ:

$$\begin{aligned} \sqrt{49x} - \sqrt{4x} + \sqrt{169x} &= \\ &= 7\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 13\sqrt{x} = 18\sqrt{x}. \end{aligned}$$

№ 4. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $(x + 6)/(2x^2 - 3x - 2)$?

ОТВЕТ:

$$\frac{x + 6}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$2x^2 - 3x - 2 \neq 0$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$x_1 = \frac{3 + 5}{4} = 2;$$

$$x_2 = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{2}{4} = -0,5.$$

$$D(y) = (-\infty; -0,5) \cup (-0,5; 2) \cup (2; +\infty).$$

№ 5. Докажите тождество $(3b/(b - 2) - 6b/(b^2 - 4b + 4)) : (b - 4)/(b^2 - 4) - (2b^2 + 8b)/(b - 2) = b$.

Смотреть РЕШЕНИЕ задачи № 5 в тетради

$$\left(\frac{3b}{b-2} - \frac{6b}{b^2-4b+4} \right) : \frac{b-4}{b^2-4} - \frac{2b^2+8b}{b-2} = b$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$1) \frac{3b}{b-2} - \frac{6b}{(b-2)^2} = \frac{3b^2 - 6b - 6b}{(b-2)^2} =$$

$$= \frac{3b^2 - 12b}{(b-2)^2} = \frac{3b(b-4)}{(b-2)^2}$$

$$2) \frac{3b(b-4)}{(b-2)^2} \cdot \frac{b^2-4}{b-4} = \frac{3b(b-2)(b+2)}{(b-2)^2} =$$

$$= \frac{3b(b+2)}{b-2}$$

$$3) \frac{3b(b+2)}{b-2} - \frac{2b^2+8b}{b-2} =$$

$$= \frac{3b^2 + 6b - 2b^2 - 8b}{b-2} = \frac{b^2 - 2b}{b-2} =$$

$$= \frac{b(b-2)}{b-2} = b$$

$$b = b$$

Что и требовалось доказать.

№ 6. Вместо автомобиля определённой грузоподъёмности для перевозки 30 т груза взяли другой автомобиль, грузоподъёмность которого на 2 т больше, чем у первого. Благодаря этому для перевозки груза понадобилось на 4 рейса меньше, чем планировалось. Найдите грузоподъёмность автомобиля, перевёзшего груз.

ОТВЕТ: 5 т.