

Вариант 1

1. Упростите выражение $\left(\frac{6}{a^2-9} + \frac{1}{3-a}\right) \cdot \frac{a^2+6a+9}{5}$ и найдите его значение при $a = -4$.

2. Выполните действия: $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 + \sqrt{24}(6 - 5\sqrt{6})$.

3. При каких значениях x функция $y = \frac{3x-2}{4} - \frac{5x+1}{2}$ принимает положительные значения?

4. Сократите дробь $\frac{2a^2 - 2b^2 - a + b}{1 - 2a - 2b}$.

5. Поезд должен был пройти 420 км за определенное время. Однако по техническим причинам выехал на 30 мин позже. Чтобы прибыть вовремя, он увеличил скорость на 2 км/ч. Какова была скорость поезда?

6. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 - (4a+3)x + 3a^2 + 3a}{x-1} = 0$

а) имеет один корень;

б) имеет только отрицательные корни?

Вариант 2 .

1. Упростите выражение $\left(\frac{4}{a^2 - 4} + \frac{1}{2 - a}\right) \cdot \frac{a^2 + 4a + 4}{3}$ и найдите его значение при $a = -2, 3$.

2. Выполните действия: $(4\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 + \sqrt{54}(8 - 7\sqrt{6})$.

3. При каких значениях x функция $y = \frac{2x + 3}{4} - \frac{6x - 5}{3}$ принимает отрицательные значения?

4. Сократите дробь $\frac{b - a - 3b^2 + 3a^2}{3a + 3b - 1}$.

5. Из одного пункта в другой, расстояние между которыми 120 км, выехали велосипедист и мотоциклист. Скорость мотоциклиста на 10 км/ч больше скорости велосипедиста, поэтому он затратил на путь на 6 ч меньше. Какова скорость мотоциклиста?

6. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 - (3a + 3)x + 2a^2 + 3a}{x - 2} = 0$:

а) имеет один корень;

б) имеет только отрицательные корни?

ОТВЕТЫ на контрольную работу

Вариант 1

№ 1. $-(a + 3)/5$; 0,2.

№ 2. -30.

№ 3. $x < -4/7$.

№ 4. $b - a$.

№ 5. 42 км/ч.

№ 6. а) $a = 1$ и $a = -2/3$; б) $a < -1$.

Смотреть РЕШЕНИЯ заданий Варианта 1

Вариант 1

① Приведем дроби в скобках к общему знаменателю и сложим их. Учтем формулу квадрата суммы чисел. Получаем

$$\left(\frac{6}{a^2-9} + \frac{1}{3-a}\right) \cdot \frac{a^2+6a+9}{5} = \left(\frac{6}{(a-3)(a+3)} - \frac{1}{a-3}\right) \cdot \frac{(a+3)^2}{5} =$$

$$= \frac{6-a-3}{(a-3)(a+3)} \cdot \frac{(a+3)^2}{5} = \frac{(3-a)(a+3)}{(a-3)(a+3)5} = -\frac{a+3}{5}.$$

Найдем значение этого выражения при $a = -4$ и получим

$$\frac{-4+3}{5} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Ответ: $-\frac{a+3}{5}; 0,2.$

② Учтем свойства квадратных корней и формулу квадрата разности чисел. Имеем

$$(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 + \sqrt{24}(6 - 5\sqrt{6}) = (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 +$$

$$+ 2\sqrt{6}(6 - 5\sqrt{6}) = 12 - 12\sqrt{6} + 18 + 12\sqrt{6} - 60 = -30.$$

Ответ: $-30.$

③ Преобразуем данную функцию. Для этого приведем дроби к общему знаменателю и вычтем их. Получаем

$$y = \frac{3x-2}{4} - \frac{5x+1}{2} = \frac{3x-2-2(5x+1)}{4} = \frac{3x-2-10x-2}{4} =$$

$$= \frac{-7x-4}{4}.$$

Так как функция принимает положительные значения, то имеем неравенство $\frac{-7x-4}{4} > 0$, или $-7x-4 > 0$, или $-4 > 7x$, откуда $-\frac{4}{7} > x$.

Ответ: $x < -\frac{4}{7}.$

④ Для сокращения дроби разложили ее числитель на множители, используя формулу разности квадратов и группировку членов. Тогда дробь имеет вид

$$\frac{2a^2 - 2b^2 - a + b}{1 - 2a - 2b} = \frac{2(a-b)(a+b) - (a-b)}{1 - 2a - 2b} =$$

$$\frac{(a-b)(2a+2b-1)}{1 - 2a - 2b} = -(a-b) = b - a.$$

Ответ: $b - a.$

⑤ Пусть x (км/ч) — реальная скорость поезда, тогда планируемая скорость $(x - 2)$ (км/ч). Расстояние 420 км поезд преодолел за $\frac{420}{x}$ (ч), а должен был за $\frac{420}{x-2}$ (ч). По условию задачи

получаем уравнение $\frac{420}{x-2} = \frac{1}{2} + \frac{420}{x}$. Умножим все члены уравнения на $2(x-2)x$. Имеем $420 \cdot 2x = x(x-2) + 420 \cdot 2(x-2)$, или $840x = x^2 - 2x + 840x - 1680$, или $x^2 - 2x - 1680 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 42$ и $x_2 = -40$ (не подходит). Итак, реальная скорость поезда 42 км/ч.

Ответ: 42 км/ч.

⑥ Сначала решим уравнение $\frac{x^2 - (4a+3)x + 3a^2 + 3a}{x-1} = 0$.

Дробь равна нулю, если ее числитель $x^2 - (4a+3)x + 3a^2 + 3a = 0$, а знаменатель $x - 1 \neq 0$. Решим квадратное уравнение. Найдем его дискриминант: $D = (4a+3)^2 - 4(3a^2+3a) = 16a^2 + 24a + 9 - 12a^2 - 12a = 4a^2 + 12a + 9 = (2a+3)^2$. Тогда корни уравнения $x_{1,2} = \frac{4a+3 \pm (2a+3)}{2}$, т. е. $x_1 = a$ и $x_2 = 3a+3$.

а) Если данное уравнение имеет один корень, то другой корень равен запрещенному значению $x = 1$. Поэтому или $a = 1$, или $3a+3 = 1$ (т. е. $a = -\frac{2}{3}$). Итак, при $a = 1$ и $a = -\frac{2}{3}$ данное уравнение имеет один корень.

б) Если уравнение имеет отрицательные корни, то выполнены неравенства $\begin{cases} a < 0, \\ 3a+3 < 0. \end{cases}$ Решение этой системы неравенств $a < -1$.

Ответ: а) $a = 1$ и $a = -\frac{2}{3}$; б) $a < -1$.

Вариант 2

№ 1. $-(a+2)/3; 0,1.$

№ 2. $-60.$

№ 3. $x > 29/18$.

№ 4. $a - b$.

№ 5. 20 км/ч.

№ 6. а) $a = 2$ и $a = -1/2$; б) $a > 0$.

Смотреть РЕШЕНИЯ заданий Варианта 2

Вариант 2

① Приведем дроби в скобках к общему знаменателю и сложим их. Учтем формулу квадрата суммы чисел. Получаем

$$\left(\frac{4}{a^2-4} + \frac{1}{2-a}\right) \cdot \frac{a^2+4a+4}{3} = \left(\frac{4}{(a-2)(a+2)} - \frac{1}{a-2}\right) \cdot \frac{(a+2)^2}{3} =$$

$$= \frac{4-a-2}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{(a+2)^2}{3} = \frac{(2-a)(a+2)^2}{(a-2)(a+2)3} = -\frac{a+2}{3}.$$

Найдем значение этого выражения при $a = -2,3$ и получим

$$-\frac{-2,3+2}{3} = \frac{0,3}{3} = 0,1.$$

Ответ: $-\frac{a+2}{3}; 0,1.$

② Учтем свойства квадратных корней и формулу квадрата разности чисел. Имеем

$$(4\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 + \sqrt{54}(8 - 7\sqrt{6}) = (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 +$$

$$+ 3\sqrt{6}(8 - 7\sqrt{6}) = 48 - 24\sqrt{6} + 18 + 24\sqrt{6} - 126 = -60.$$

Ответ: $-60.$

③ Преобразуем данную функцию. Для этого приведем дроби к общему знаменателю и вычтем их. Получаем

$$y = \frac{2x+3}{4} - \frac{6x-5}{3} = \frac{3(2x+3) - 4(6x-5)}{12} = \frac{6x+9-24x+20}{12} =$$

$$= \frac{-18x+29}{12}.$$

Так как функция принимает положительные значения, то имеем неравенство $\frac{-18x+29}{12} < 0$, или $-18x+29 < 0$, или

$$29 < 18x, \text{ откуда } \frac{29}{18} < x.$$

Ответ: $x > \frac{29}{18}.$

④ Для сокращения дроби разложили ее числитель на множители, используя формулу разности квадратов и группировку членов. Тогда дробь имеет вид

$$\frac{b-a-3b^2+3a^2}{3a+3b-1} = \frac{(b-a)-3(b-a)(b+a)}{3a+3b-1} =$$

$$= \frac{(b-a)(1-3b-3a)}{3a+3b-1} = -(b-a) = a-b.$$

Ответ: $a-b.$

⑤ Пусть x (км/ч) – скорость мотоциклиста, тогда скорость велосипедиста $(x-10)$ (км/ч). Расстояние 120 км мотоциклист преодолеет за время $\frac{120}{x}$ (ч), велосипедист – за время $\frac{120}{x-10}$ (ч).

По условию задачи получаем уравнение $\frac{120}{x-10} = \frac{120}{x} + 6$. Умно-

жим все члены уравнения на $\frac{1}{6}(x-10)x$. Имеем $20x = 20(x-10) + (x-10)x$, или $20x = 20x - 200 + x^2 - 10x$, или $x^2 - 10x - 200 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 20$ и $x_2 = -10$ (не подходит). Итак, реальная скорость мотоциклиста 20 км/ч.

Ответ: 20 км/ч.

⑥ Сначала решим уравнение $\frac{x^2 - (3a+3)x + 2a^2 + 3a}{x-2} = 0$.

Дробь равна нулю, если ее числитель $x^2 - (3a+3)x + 2a^2 + 3a = 0$, а знаменатель $x-2 \neq 0$. Решим квадратное уравнение. Найдем его дискриминант: $D = (3a+3)^2 - 4(2a^2+3a) = 9a^2 + 18a + 9 - 8a^2 - 12a = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$. Тогда корни уравнения $x_{1,2} = \frac{3a+3 \pm (a+3)}{2}$, т. е. $x_1 = a$ и $x_2 = 2a+3$.

а) Если данное уравнение имеет один корень, то другой корень равен запрещенному значению $x = 2$. Поэтому или $a = 2$, или $2a+3 = 2$ (т. е. $a = -\frac{1}{2}$). Итак, при $a = 2$ и $a = -\frac{1}{2}$ данное уравнение имеет один корень.

б) Если уравнение имеет положительные корни, то выполнены неравенства $\begin{cases} a > 0, \\ 2a+3 > 0. \end{cases}$ Решение этой системы неравенств $a > 0$.

Ответ: а) $a = 2$ и $a = -\frac{1}{2}$; б) $a > 0$.