

ЧИСЛОВЫЕ НАБОРЫ НА КАРТОЧКАХ И ЧИСЛАХ

1) Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.

2) На доске написано число 2015 и еще несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходящих 5000. Все написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

а) Может ли на доске быть написано ровно 1009 чисел?

б) Может ли на доске быть написано ровно пять чисел?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

а) Может. Например, числа 1, 2, 3, 5, 7, ..., 2015; б) Может. Например, числа 1, 2, 3, 5, 2015; в) 4, например, 1, 2, 3, 2015.

3) На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

а) да; б) нет; в) $38\frac{1}{7}$.

4) Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-11, -7, -5, -4, -1, 2, 6$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 4 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

а) $-7, -4, 6$; б) 5; в) нет.

5) На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

а) 44; б) отрицательных; в) 17.

6) На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

а) нет; б) да; в) 8 минут.

7) Каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9$ по одному записывают на 8 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

а) нет; б) нет; в) 4.

8) Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

а) нет; б) нет; в) 4.

9) На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

а) 36; б) отрицательных; в) 16.

10) Из первых 22 натуральных чисел $1, 2, \dots, 22$ выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число k быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа k .

а) нет; б) нет; в) 10.

11) На доске написано 10 неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается сумма, округлённая до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9, а вместо 3,3 и 5 записывается 8).

а) Приведите пример 10 нецелых чисел и последовательности 9 ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел.

б) Может ли после 9 ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на 7?

в) На какое наибольшее число могут отличаться числа, записанные на доске после 9 ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?

а) например, числа 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01 и любая последовательность ходов; б) нет; в) 5.

12) На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b , записанных на доске заменяется на два числа: $a + b$ и $2a - 1$ или $a + b$ и $2b - 1$.

Пример: числа 2 и 3 заменяются на 3 и 5, на 5 и 5, соответственно.

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 50 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 100.

в) Сделали 2015 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

а) $(2,3) \rightarrow (5,5) \rightarrow (10,9) \rightarrow (19,17)$; б) нет; в) 2.

13) На проекте «Мисс Чистополь – 2019» выступление каждой участницы оценивают шесть судей. При этом каждый судья выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что за выступление Ангелины Курбановой все члены жюри выставили различные оценки. По старой системе оценивания итоговый балл за выступление определяется как среднее арифметическое всех оценок судей. По новой системе оценивания итоговый балл вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и считается среднее арифметическое четырех оставшихся оценок.

а) Могут ли итоговые баллы, вычисленные по старой и новой системам оценивания, оказаться одинаковыми?

б) Может ли разность итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, оказаться равной $1/8$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

а) да; б) нет; в) $\frac{5}{6}$.

14) На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

а) 17 и 16; б) нет; в) 1650.

15) Набор состоит из 33 натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых 27 чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно 13 единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее 13 единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

а) да; б) нет.

16) Каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 10 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

а) нет; б) нет; в) 4.

17) На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

а) да; б) нет; в) 35.

18) На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в три раза.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?
- б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?
- в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

а) да; б) нет; в) 2 или 3.

19) Задумано несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Эти числа и все их возможные произведения (по 2 числа, по 3 числа и т. д.) выписывают на доску. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляют одно такое число n , а остальные числа, равные n , стирают. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 9, 12, 36.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 105, 315, 945?

в) Приведите все примеры шести задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор, наибольшее число в котором равно 82.

а) 2, 3, 3, 5; б) нет; в) 1, 1, 1, 1, 1, 82 или 1, 1, 1, 1, 2, 41.

20) Задумано несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Эти числа и все их возможные произведения (по 2 числа, по 3 числа и т. д.) выписывают на доску. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляют одно такое число n , а остальные числа, равные n , стирают. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 9, 12, 36.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 5, 10, 11, 22, 25, 55, 110, 275, 550?

в) Приведите все примеры пяти задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор, наибольшее число в котором равно 91.

а) 2, 3, 5, 5; б) нет; в) 1, 1, 1, 1, 91 или 1, 1, 1, 7, 13.

21) Саша берёт пять различных натуральных чисел и проделывает с ними следующие операции: сначала вычисляет среднее арифметическое первых двух чисел, затем среднее арифметическое результата и третьего числа, потом среднее арифметическое полученного результата и четвёртого числа, потом среднее арифметическое полученного результата и пятого числа — число A .

а) Может ли число A равняться среднему арифметическому начальных пяти чисел?

б) Может ли число A быть больше среднего арифметического начальных чисел в пять раз?

в) В какое наибольшее целое число раз число A может быть больше среднего арифметического начальных пяти чисел?

а) да, например: 1, 3, 8, 11, 2; б) нет; в) 2.

22) На доске написано 30 натуральных чисел. Какие-то из них красные, а какие-то зелёные. Красные числа кратны 7, а зелёные числа кратны 5. Все красные числа отличаются друг от друга, как и все зелёные. Но между красными и зелёными могут быть одинаковые.

а) Может ли сумма зелёных чисел быть меньше 2325, если на доске написаны только кратные 5 числа?

б) Может ли сумма чисел быть 1467, если только одно число красное?

в) Найдите наименьшее количество красных чисел, которое может быть при сумме 1467.

а) Да; б) нет; в) 10.

23) На доске написано 30 натуральных чисел. Какие-то из них красные, а какие-то зелёные. Красные числа кратны 8, а зелёные числа кратны 3. Все красные числа отличаются друг от друга, как и все зелёные. Но между красными и зелёными могут быть одинаковые.

а) Может ли сумма зелёных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если на доске написаны только кратные 3 числа?

б) Может ли сумма чисел быть 1066, если только одно число красное?

в) Найдите наименьшее количество красных чисел, которое может быть при сумме 1066.

а) Да; б) нет; в) 7.

24) На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5100.

а) Может ли быть записано число 250?

б) Можно ли обойтись без числа 11?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 11, может быть на доске?

а) Нет; б) нет; в) 6.

25) На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5120.

а) Может ли быть записано число 230?

б) Можно ли обойтись без числа 14?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

а) Нет; б) нет; в) 4.

26) На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись заканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810.

а) Может ли быть 24 четных числа?

б) Может ли быть на доске ровно два числа, оканчивающихся на 7?

в) Какое наименьшее количество чисел с последней цифрой 7 может быть на доске?

а) да; б) нет; в) 4.

27) На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое или оканчивается на 9, или четное, а сумма чисел равна 877.

а) Может ли быть на доске 27 четных чисел?

б) Может ли быть на доске ровно два числа, оканчивающихся на 9?

в) Какое наименьшее количество чисел с последней цифрой 9 может быть на доске?

а) да; б) нет; в) 3.

28) На конкурсе «Мисс–2018» выступление каждой участницы оценивают шесть судей. Каждый судья выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что за выступление Ангелины Курбановой все члены

жюри выставили различные оценки. По старой системе оценивания итоговый балл за выступление определяется как среднее арифметическое всех оценок судей. По новой системе оценивания итоговый балл вычисляется следующим образом: отбрасываются две наибольшие оценки, и считается среднее арифметическое четырех оставшихся оценок.

а) Может ли разность итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, быть равной 18?

б) Может ли разность итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, быть равной $\frac{1}{2019}$?

в) Найдите наименьшее возможное значение разности итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

а) нет; б) нет; в) 1.

29) В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 6?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

а) да, б) да, в) 34.

30) На доске написано n единиц, между некоторыми из которых поставили знаки $+$ и посчитали сумму. Например, если изначально было написано $n = 12$ единиц, то могла получиться, например, такая сумма:

$$1 + 11 + 11 + 111 + 11 + 1 + 1 = 147.$$

а) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 60$?

б) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 80$?

в) Чему могло равняться n , если полученная сумма чисел равна 150?

а) да, б) нет, в) 150, 141, 132, 123, 114, 105, 96, 87, 78, 69, 60, 51, 42, 33, 24, 15.

31) На доске написано несколько различных натуральных чисел, которые делятся на 3 и оканчиваются на 4.

а) Может ли сумма составлять 282?

б) Может ли их сумма составлять 390?

в) Какое наибольшее количество чисел могло быть на доске, если их сумма равна 2226?

а) да, б) нет, в) 9.

32) На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 6, к каждому числу из второй группы приписали справа цифру 9, а числа третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 9 раз?

б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 19 раз?

в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

а) да, б) нет, в) в 11,6 раза.

33) На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 420?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 419?

в) В тройке чисел первое число трёхзначное, а третье равно 5. Сколько существует таких троек?

а) да, б) нет, в) 85.