ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА

1) Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

а) да; б) нет; в) 91.

2) За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m=3$, $d=2$?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m+d=10$.

в) Каковы все возможные значения d, если $m = 7d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

а) 14; б) 90; в) 1.

3) За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m=2$, $d=2$?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m+d=10$?

в) Каковы все возможные значения d, если известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

а) 10; б) 90; в) все натуральные числа.

4) Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{7}{19}$.

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 6d$?

а) Да, например, если $a = 10$, $b = 20$, $c = 11$ и $d = 37$; б) нет; в) $\frac{79}{21}$.

5) Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 16?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 235.

а) да; б) 41; в) 5 и 10.

6) Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 13?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 500?

в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 57.

а) нет; б) 31; в) 3, 6.

7) Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

а) да; б) нет; в) 4.

8) Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{9}{23}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>5b$ и $c>8d$?

а) Да, например, если $a=11$, $b=30$, $c=16$ и $d=39$; б) нет; в) $\frac{177}{29}$.

9) Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{6}{23}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>4b$ и $c>7d$?

а) Да, например, если $a=10$, $b=20$, $c=14$ и $d=72$; б) нет; в) $\frac{84}{17}$.

10) Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть три очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

а) Да, например, 5014, 5015, …, 5033; б) нет; в) 11.

11) Натуральные числа *a, b, c* и *d* удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа *a, b, c* и *d*, если $a+b+c+d=15$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=27$.

б) Может ли быть $a+b+c+d=19$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=19$?

в) Пусть $a+b+c+d=1000$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1000$. Найдите количество возможных значений числа *a*.

а) $a=7,\ b=5,\ c=2,\ d=1$; б) нет; в) 248.

12) Натуральные числа *a, b, c* и *d* удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа *a, b, c* и *d*, если $a+b+c+d=15$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=19$.

б) Может ли быть $a+b+c+d=23$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=23$?

в) Пусть $a+b+c+d=1200$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1200$. Найдите количество возможных значений числа *a*.

а) $a=6$, $b=5$, $c=3$, $d=1$; б) нет; в) 298.

13) Четыре натуральных числа *a, b, c, d* таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$

а) Могут ли все числа быть попарно различны?

б) Может ли одно из этих чисел равняться 9?

в) Найдите все возможные наборы чисел, среди которых ровно два числа равны.

а) Да, например, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$

б) Да, например, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1$

в) $\{2;10;5;5\}$, $\{2;4;8;8\}$, $\{2;3;12;12\}$, $\{3;6;4;4\}$, $\{4;12;3;3\}$

14) Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{13}{7}$?

б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{8}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25?

а) $a=13$, $b=7$, $c=8$; б) нет; в) $\frac{35}{24}$.

15) По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

а) Да; б) нет; в) семь.

16) Коля умножил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число, и получил произведение, равное m. Вова умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение, равное n.

а) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 6?

б) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 13?

в) Какие значения может принимать модуль разности чисел m и n?

а) да; б) нет; в) все четные натуральные числа.

17) На окружности некоторым способом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

а) нет; б) да; в) 6.

18) Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{30}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

а) нет; б) да; в) $\frac{4}{7}$.

19) На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 11 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 38?

б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковы?

в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 5. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

а) нет, б) да, в) 110.

20) Длины сторон прямоугольника — натуральные числа, а его периметр равен 4000. Известно, что длина одной стороны прямоугольника равна n% от длины другой стороны, где n — также натуральное число.

а) Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольника?

б) Какое наименьшее значение может принимать площадь прямоугольника?

в) Найдите все возможные значения, которые может принимать площадь прямоугольника, если дополнительно известно, что $n < 100$.

а) 1 000 000; б) 1999; в) 937 500 или 640 000.

21) а) Чему равно число способов записать число 1292 в виде $1292 = a_3 * 10^3 + a_2 * 10^2 + a_1 * 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 * 10^3 + a_2 * 10^2 + a_1 * 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0;1;2;3$ ровно 130 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 * 10^3 + a_2 * 10^2 + a_1 * 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0;1;2;3$ ровно 130 способами?

а) 130; б) да; в) 20.

22) а) Можно ли число 2014 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 199 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

а) да; б) нет; в) 110.

23) Будем называть четырёхзначное число интересным, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 6321.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна трём.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 111?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

а) Да, например, 6222 и 6219; б) нет; в) 11.

24) Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество $\{100;101;102;...;199\}$ хорошим?

б) Является ли множество $\{2;4;8;...;2^{200}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{3;4;5;6;8;10;12\}$?

а) да; б) нет; в) 8.

25) Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество $\{200;201;202;...;299\}$ хорошим?

б) Является ли множество $\{2;4;8;...;2^{100}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1;2;4;5;7;9;11\}$?

а) да; б) нет; в) 8.

26) Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 10, а сумма которых больше 90, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 90, но больше:

а) 80;

б) 82;

в) 81.

а) да; б) нет; в) да.

27) Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 11, а сумма которых больше 110, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 110, но больше:

а) 99;

б) 101;

в) 100.

а) да; б) нет; в) да.

28) Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых среди чисел $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых среди чисел $\frac{a_1}{b_1}, \frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно, что $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

а) Да, например, $1,6,11,16,...$ и $1,2,3,4,...$ соответственно; б) нет; в) 2.

29) Три числа назовем хорошей тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовем отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдется ни одной хорошей тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в) Даны 12 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

а) да; б) нет; в) 30.

30) На доске написаны числа 2 и 3. За один ход из них можно получить числа $a+b$ и $2a-1$ или числа $a+b$ и $2b-1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить числа 5 и 3 или 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?

в) Сделали 1007 ходов, причем на доске никогда не было равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

а) $(2;3)$, $(5;5)$, $(10;9)$, $(19;19)$; б) нет; в) 2.

31) На доске написаны числа $1,2,3,...,30$. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

а) $(13,14,7)$, $(12,15,6)$, $(11,16,5)$, $(10,17,4)$, $(9,18,3)$; б) нет; в) 6.

32) Рассмотрим частное трёхзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27}$.

б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

а) например, 339; б) нет; в) $\frac{931}{27}$.

33) Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{3}{2}$?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{5}{4}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 18?

а) Да, например, числа 10, 11 и 15; б) нет; в) $\frac{25}{17}$.

34) а) Приведите пример такого натурального числа n, что числа n^2 и $(n+16)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200.

б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте a свойством?

в) Сколько существует двухзначных чисел m, для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n, таких, что n^2 и $(n+m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200.

а) 17; б) 36; в) 18.

35) а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

а) например, 2529; б) нет; в) Число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

36) Шесть различных натуральных чисел таковы, что никакие два из них не имеют общего делителя, большего 1.

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 39?

б) Может ли сумма этих чисел быть равной 34?

в) Какова их минимальная сумма?

а) да; б) нет; в) 29.

37) Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых нет ни одного очень счастливого числа?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?

в) Найдите наименьшее нечётное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

а) Да, например, $1235, 1236, ..., 1254$; б) нет; в) 11.

38) Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; ...; 199\}$ хорошим?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; ...; 2^{200}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$?

а) нет; б) да; в) 2.

39) Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — натуральные числа, не превосходящие 100. Также известно, что числа a, b и c попарно отличаются друг от друга не менее, чем на 2.

а) Может ли такое уравнение иметь корень –7?

б) Может ли такое уравнение иметь корень –53?

в) Какой наименьший целый корень может иметь такое уравнение?

а) да, например, $2x^2 + 16x + 14 = 0$; б) нет; в) –50.

40) Дано квадратное уравнение $ax^2 - bx + c = 0$, где a, b, c — натуральные числа, не превосходящие 200. Также известно, что числа a, b и c попарно отличаются друг от друга не менее, чем на 2.

а) Может ли такое уравнение иметь корень 9?

б) Может ли такое уравнение иметь корень 135?

в) Какой наибольший целый корень может иметь такое уравнение?

а) да, например, $2x^2 - 20x + 18 = 0$; б) нет; в) 100.

41) Дан выпуклый многоугольник M, который можно разрезать на 1292 квадрата площади 1.

а) Приведите пример такого многоугольника, если известно, что длина его наименьшей стороны больше 15.

б) Какое наибольшее число сторон может иметь многоугольник M?

в) Какое наибольшее и наименьшее значение может иметь периметр этого многоугольника?

а) Прямоугольник 17×76; б)4; в) 2586; 144.

42) Дима и Никита задумали по цифре и сообщили их Маше. Маша нашла сумму этих цифр, их разность, а затем перемножила все 4 числа. Мог ли полученный результат быть равен:

а) 1989?

б) 2012?

в) 2016?

Если нет — объясните, почему, если да — определите цифры, задуманные Димой и Никитой.

а) нет; б) нет; в) да, 9 и 7.

43) На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?

б) Может ли ровно одно число на доске оканчивается на 6?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть записано на доске?

а) нет; б) нет; в) 11.

44) С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.

б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трехзначного числа?

а) 2847; б) нет; в) 9167169.

45) В каждой клетке квадратной таблицы 6x6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?

б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?

в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

а) да; б) нет; в) $\frac{31}{6}$.

46) а) Приведите пример семизначного числа, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 426, 786.

б) Существует ли девятизначное число, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 238, 435, 567, 791?

в) Найдите наименьшее число, из которого можно получить все числа от 1 до 40 включительно, вычёркивая из него цифры.

а) Например, 7814236; б) нет; в) 1231234056789.

47) На доске написано n чисел a_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Каждое из них не меньше 50 и не больше 150. Каждое из этих чисел уменьшают на $r_i\%$. При этом либо $r_i = 2\%$, либо число a_i уменьшается на 2, то есть становится равным $a_i - 2$. (Какие-то числа уменьшились на число 2, а какие-то — на 2 процента).

а) Может ли среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, ..., r_n$ быть равным 5?

б) Могло ли так получиться, что среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, ..., r_n$ больше 2, при этом сумма чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ уменьшилась более чем на $2n$?

в) Пусть всего чисел 30, а после выполнения описанной операции их сумма уменьшилась на 40. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел $r_1, r_2, ..., r_n$.

а) нет; б) да; в) $\frac{8}{3}$.

48) Назовем натуральное число хорошим, если в нем можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 11.

а) Является ли число 1234 хорошим?

б) Является ли число 12345 хорошим?

в) Найти наибольшее хорошее число, состоящее из различных нечетных цифр.

а) да; б) нет; в) 9753.

49) а) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right| \le \frac{1}{100}$?

б) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left|\frac{m^2}{n^2}-2\right| \le \frac{1}{10000}$?

в) Найдите все возможные значения натурального числа n при каждом из которых значение выражения $\left|\frac{n+10}{n}-\sqrt{2}\right|$ будет наименьшим.

а) 71 и 50; б) нет; в)24.

50) В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в два раза?

б) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный балл в школе №2 равняться 1?

в) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

а) нет; б) нет; в) 3.

51) а) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n, для которых $m \le n$ и $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{14}$.

а) Да, например, $\frac{33}{100}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{50}+\frac{1}{100}$;

б) Да, например, $\frac{15}{91}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}+\frac{1}{182}+\frac{1}{273}+\frac{1}{546}$;

в) 28 и 28, 21 и 42, 16 и 112, 15 и 210, 18 и 63.

52) В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшится в 10 раз?

б) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 7?

в) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

а) да; б) нет; в) 5.

53) В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 50 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе №1 уменьшиться в 2 раза?

б) Средний балл в школе №1 уменьшился на 2%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 2%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 9?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 2%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 2%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

а) да; б) нет; в) 6.

54) В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №1 средний балл равнялся 18.

Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%.

а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?

б) В школе №1 все писавшие тест набрали разное количество баллов. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся этой школы?

в) Известно, что изначально в школе №2 писали тест более 10 учащихся. Какое наименьшее количество учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?

а) 6; б) 89; в) 19.

55) За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 3 пункта при получении трёх звёзд, на 6 пунктов при получении двух звёзд и на 9 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.

а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 32 пункта?

б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

в) За пройденный уровень начисляется 9000 очков при получении трёх звёзд, 5000 — при получении двух звёзд и 2000 — при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

а) нет; б) 7; в) 49 000.

56) а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?

б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?

в) Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

а) да; б) нет; в) 5.

57) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

а) да; б) нет; в) 5.

58) Дано трехзначное натуральное число, не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 89?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 86?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

а) да; б) нет; в) 91.

59) Десять мальчиков и семь девочек пошли в лес за грибами. Известно, что любые две девочки набрали больше грибов, чем любые три мальчика, но любые пять мальчиков набрали больше грибов, чем любые три девочки.

а) Может ли так случиться, что какая-то девочка набрала меньше грибов, чем какой-нибудь мальчик?

б) Может ли так случиться, что количество найденных грибов у всех детей будет различным?

в) Найдите минимальное возможное количество грибов, собранное всеми детьми суммарно.

а) нет, б) да, в) 106.

60) Сорок гирек массой 1 г, 2 г, ..., 40 г разложили по двум кучам, в каждой куче хотя бы одна гирька. Масса каждой гирьки выражается целым числом граммов. Затем из второй кучи переложили в первую одну гирьку. После этого средняя масса гирек в первой куче увеличилась на 1 г.

а) Могло ли такое быть, если первоначально в первой куче лежали только гирьки массой 6 г, 10 г и 14 г?

б) Могла ли средняя масса гирек в первой куче первоначально равняться 8,5 г?

в) Какое наибольшее число гирек могло быть первоначально в первой куче?

а) нет, б) нет, в) 25.

61) Дано трёхзначное число A, сумма цифр которого равна S.

а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1105$?

б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1106$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение, если оно больше 1503?

а) да, б) нет, в) 1507.