

## ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ: ЦИЛИНДР, КОНУС, ШАР

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 13 профильного ЕГЭ по теме «Фигуры вращения: цилиндр, конус, шар». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

### ЦИЛИНДР

**Прямой круговой цилиндром** называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону. **Радиусом цилиндра** называется радиус его основания. **Высотой цилиндра** называется расстояние между плоскостями его оснований. **Осью цилиндра** называется прямая, проходящая через центры оснований.

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, представляет собой прямоугольник. Две его стороны – образующие цилиндра, а две другие – параллельные хорды оснований. В частности, прямоугольником является **осевое сечение**. Это – сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось.

**Площадь боковой поверхности цилиндра:**  $S_{б.п.} = 2\pi R H$  ;

**площадь полной поверхности цилиндра:**  $S = 2\pi R H + 2\pi R^2$  ;

**объем цилиндра:**  $V = \pi R^2 H$  ,

где  $R$  – радиус основания;  $H$  – длина высоты цилиндра.

### КОНУС

**Прямой круговой конусом** называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет. Другой катет треугольника, вращаясь вокруг этой же оси, дает круг, который называется **основанием**. При вращении вокруг этой оси гипотенузы получается фигура, называемая **боковой поверхностью конуса**. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются **образующими конуса**. **Высотой конуса** называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. **Осью конуса** называется прямая, содержащая его высоту.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса. В частности, равнобедренным треугольником является осевое сечение конуса. Это сечение, которое проходит через ось конуса.

**Площадь боковой поверхности конуса:**  $S_{б.п.} = \pi R L$  ;

**площадь полной поверхности конуса:**  $S = \pi R L + \pi R^2$  ;

**объем конуса находится по формуле:**  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$  ,

где  $R$  – радиус основания;  $L$  – длина образующей;  $H$  – длина высоты конуса.

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется **усеченным конусом**.

**Площадь боковой поверхности усеченного конуса:**  $S_{б.п} = \pi(R_1 + R_2)L$ ;

**объем усеченного конуса:**  $V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2)$ ,

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы оснований;  $L$  – длина образующей;  $H$  – длина высоты конуса.

## СФЕРА И ШАР

**Шаром** называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии от данной точки, не большем данного положительного числа. Эта точка называется **центром шара**, а данное расстояние **радиусом шара**. **Шаровой поверхностью** или **сферой** шара называется множество всех точек пространства, находящихся на равном положительном расстоянии от некоторой точки. Эта точка называется **центром сферы**, а данное расстояние **радиусом сферы**. Таким образом, точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется **радиусом**. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется **диаметром**.

**Площадь поверхности шара:**  $S = 4\pi R^2$ ;

**объем шара:**  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , где  $R$  – радиус шара.

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость. Плоскость, проходящая через центр шара, называется **диаметральной плоскостью**. Сечение шара диаметральной плоскостью называется **большим кругом**, а сечение сферы – **большой окружностью**. **Шаровым сегментом** называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

**Площадь сегментной поверхности:**  $S = 2\pi RH$ ;

**объем шарового сегмента находится по формуле:**  $V = \pi H^2 \left( R - \frac{H}{3} \right)$ ,

где  $H$  – высота сегмента;  $R$  – радиус шара.

**Шаровым сектором** называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. Если шаровой сегмент меньше полушара, то он дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием является основание сегмента. Если же сегмент больше полушара, то указанный конус из него удаляется.

**Объем шарового сектора:**  $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$ ; **площадь полной поверхности**

**шарового сектора** складывается из площади сегментной поверхности и площади боковой поверхности конуса и находится по формуле:

$S_{\text{шар. сект}} = S_{\text{шар. сегм}} + S_{б.п. кон} = 2\pi RH + \pi R\sqrt{2RH - H^2}$ , где  $H$  – высота соответствующего шарового сегмента;  $R$  – радиус шара.

### Уровень А

**1А.** Радиус основания цилиндра равен 5, высота цилиндра равна 8. Плоскость  $\alpha$ , параллельная оси цилиндра, удалена от оси на расстояние, равное 4. Найдите:

- а) объём цилиндра;
- б) площадь боковой поверхности;
- в) площадь сечения цилиндра плоскостью  $\alpha$ ;
- г) расстояние между осью цилиндра и диагональю прямоугольника сечения;
- д) угол между осью цилиндра и диагональю прямоугольника сечения.

**2А.** Радиус основания конуса равен  $2\sqrt{3}$ , угол в осевом сечении равен  $60^\circ$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через вершину конуса и хорду  $AB$  основания, равную  $2\sqrt{3}$ . Найдите:

- а) объём конуса;
- б) площадь полной поверхности;
- в) площадь сечения конуса плоскостью  $\alpha$ ;
- г) расстояние от центра основания конуса до плоскости  $\alpha$ ;
- д) угол между плоскостями, проходящими через ось конуса и точки  $A$  и  $B$  соответственно;
- е) угол между образующей конуса, проходящей через точку  $B$ , и диаметром основания, проходящим через точку  $A$ .

**3А.** Площадь сечения шара плоскостью  $\alpha$ , удалённой от центра на расстояние, равное 12, равна  $81\pi$ . Найдите:

- а) объём шара;
- б) площадь поверхности шара;
- в) отношение площади поверхности шара к площади полной поверхности вписанного в шар куба;
- г) объём конуса, основание которого — сечение шара плоскостью  $\alpha$ , а вершина лежит на поверхности шара;
- д) боковую поверхность цилиндра, основания которого — сечения шара плоскостью  $\alpha$  и параллельной ей плоскостью.

**4А.** Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник  $ABC$  с боковой стороной 10 углом  $\angle A = 120^\circ$  расположен так, что его вершина  $A$  лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины  $B$  и  $C$  — на окружности верхнего основания. Найдите угол между плоскостью  $ABC$  и плоскостью основания цилиндра.

**5А.** Радиус основания конуса с вершиной  $P$  равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки  $A$  и  $B$ , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3. Найдите площадь сечения конуса плоскостью  $ABP$ .

**6А.** Отрезок  $AC$  — диаметр основания конуса, отрезок  $AP$  — образующая этого конуса и  $AP = AC$ . Хорда основания  $BC$  составляет с прямой  $AC$  угол  $60^\circ$ . Через  $AP$  проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой  $BC$ . Найдите расстояние от центра основания конуса  $O$  до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

**7А.** В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно  $\sqrt{5}$ , а высота равна 1, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

**8А.** Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

**9А.** Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84. Найдите радиус шара.

**10А.** Плоскость  $\alpha$  пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость  $\beta$ , параллельная плоскости  $\alpha$ , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью  $\alpha$ .

### ОТВЕТЫ

**1А.** а)  $200\pi$ ; б)  $80\pi$ ; в) 48; г) 4; д)  $\arctg \frac{3}{4}$ . **2А.** а)  $24\pi$ ; б)  $36\pi$ ; в)  $3\sqrt{15}$ ; г)

$\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ; д)  $60^\circ$ ; е)  $\arccos \frac{1}{4}$ . **3А.** а)  $4500\pi$ ; б)  $900\pi$ ; в)  $\frac{\pi}{2}$ ; г)  $81\pi$  и  $729\pi$ ; д)

$432\pi$ . **4А.**  $\arcsin \frac{3}{5}$ . **5А.**  $9\sqrt{14}$ . **6А.**  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ . **7А.**  $12(7 - 4\sqrt{3})\pi$ . **8А.**  $\frac{15}{4}$ . **9А.** 5.

**10А.** 12.

### Уровень В

**1В.** В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания — точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  — образующая цилиндра, а  $AC$  — диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $CC_1 = 2$ .

а) Докажите, что угол между прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен  $45^\circ$ .

б) Найдите объём цилиндра.

**2В.** В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания — точки  $B_1$  и  $C_1$ , причем  $BB_1$  — образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол  $ABC_1$  прямой.
- Найдите угол между прямыми  $BB_1$  и  $AC_1$ , если  $AB = 6$ ,  $BB_1 = 15$ ,  $B_1C_1 = 8$ .

**3В.** В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.

- Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.
- Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

**4В.** Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно  $\sqrt{730}$ .

- Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.
- Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

**5В.** Прямоугольник  $ABCD$  и цилиндр расположены таким образом, что  $AB$  — диаметр верхнего основания цилиндра, а  $CD$  лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом  $60^\circ$ .

- Докажите, что  $ABCD$  — квадрат.
- Найдите длину той части отрезка  $BD$ , которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен  $\sqrt{2}$ .

**6В.** В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда  $AB$ , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр  $CD$ , перпендикулярный  $AB$ . Построено сечение  $ABNM$ , проходящее через прямую  $AB$  перпендикулярно прямой  $CD$  так, что точка  $C$  и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр  $CD$ , лежат с одной стороны от сечения.

- Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
- Найдите объём пирамиды  $SABNM$ .

**7В.** Отрезок  $AB$  — диаметр верхнего основания цилиндра,  $CD$  — диаметр нижнего, причём отрезки  $AB$  и  $CD$  не лежат на параллельных прямых.

- Докажите, что у тетраэдра  $ABCD$  скрещивающиеся рёбра попарно равны.
- Найдите объём этого тетраэдра, если  $AC = 6$ ,  $AD = 8$ , а радиус цилиндра равен 3.

**8В.** Высота конуса равна 6, а радиус основания равен 8.

- Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 50.
- Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.

**9В.** Проведены две параллельные плоскости по одну сторону от центра сферы на расстоянии 3 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении две окружности, длины которых равны  $18\pi$  и  $24\pi$ .

а) Точка  $H$  — ортогональная проекция произвольной точки меньшей окружности на плоскость большей. Докажите, что точка  $H$  делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении 1 : 7.

б) Найдите объём шара, ограниченного данной сферой.

**10В.** Плоскость  $\alpha$  проходит через диаметр  $AB$  сферы. Через произвольную точку  $M$ , лежащую на сфере, но не лежащую в плоскости  $\alpha$ , проведена плоскость  $\beta$ , перпендикулярная прямой  $AB$ . Отрезок  $CD$  — общая хорда окружностей сечений сферы плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

а) Докажите, что  $\angle CMD = 90^\circ$ .

б) Вершина конуса совпадает с точкой  $A$ , а окружность основания — с окружностью сечения сферы плоскостью  $\beta$ . Найдите объём конуса, если диаметр сферы равен 15, а  $MB = 3\sqrt{5}$ .

**11В.** На окружности основания конуса с вершиной  $P$  выбраны точки  $A$  и  $B$ , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 2.

а) Пусть  $MN$  — диаметр окружности основания, перпендикулярный хорде  $AB$ . Докажите, что объём одной из пирамид  $PABN$  и  $PABM$  втрое больше объёма другой.

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью  $ABP$ , если радиус основания конуса равен 6, а длина его образующей равна 7.

**12В.** Угол при вершине осевого сечения конуса равен  $\arccos \frac{7}{8}$ .

а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в пять раз больше площади его основания.

б) Найдите угол в развёртке боковой поверхности.

**13В.** Радиус основания конуса с вершиной  $S$  и центром основания  $O$  равен 13, а его высота равна  $3\sqrt{41}$ . Точки  $A$  и  $B$  — концы образующих,  $M$  — середина  $SA$ ,  $N$  — точка в плоскости основания такая, что прямая  $MN$  параллельна прямой  $SB$ .

а) Докажите, что угол  $ANO$  — прямой.

б) Найдите угол между прямой  $BM$  и плоскостью основания конуса, если  $AB = 10$ .

**14В.** Два конуса имеют общее основание, причем один из них находится внутри другого. Образующие этих конусов составляют с плоскостью основания углы 60 и 30 .

а) Докажите, что вершина меньшего конуса делит высоту большего конуса в отношении 2 : 1, считая от вершины большего конуса.

б) Найдите объём тела, заключенного между боковыми поверхностями этих конусов, если известно, что сумма высот обоих конусов равна 4.

**15В.** В конус вписан шар.

а) Докажите, что отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара равно отношению их объемов.

б) Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания конуса, если отношение объема конуса к объему вписанного шара равно  $\frac{9}{4}$ , а отношение радиуса шара к радиусу основания конуса меньше  $\frac{3}{5}$ .

**16В.** Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности основания конуса с вершиной  $S$ , причем  $A$  и  $C$  диаметрально противоположны. Точка  $M$  – середина  $BC$ .

а) Докажите, что прямая  $SM$  образует с плоскостью  $ABC$  такой же угол, как и прямая  $AB$  с плоскостью  $SBC$ .

б) Найдите угол между прямой  $SA$  и плоскостью  $SBC$ , если  $AB = 6$ ,  $BC = 8$  и  $SC = 5\sqrt{2}$ .

**17В.** В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания – точка  $C_1$ , причем  $CC_1$  – образующая цилиндра, а  $AC$  – диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $CC_1 = 6$ .

а) Докажите, что угол между прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $AC_1$ .

**18В.** Полушар и вписанный в него конус имеют общее основание и общую высоту.

а) Докажите, что объем части полушара, лежащей вне конуса равен объему конуса.

б) Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите площадь сечения, заключенного между боковой поверхностью конуса и поверхностью полушара, если радиус полушара равен 4.

**19В.** На окружности основания конуса с вершиной  $S$  отмечены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, что  $AB = BC$ . Медиана  $AM$  треугольника  $ACS$  пересекает высоту конуса.

а) Точка  $N$  – середина отрезка  $AC$ . Докажите, что угол  $MNB$  прямой.

б) Найдите угол между прямыми  $AM$  и  $SB$ , если  $AS = 2$ ,  $AC = \sqrt{6}$ .

**20В.** Трапеция  $ABCD$  и цилиндр расположены таким образом, что  $AD$  – диаметр нижнего основания цилиндра, а точки  $C$  и  $B$  лежат на окружности верхнего основания и хорда  $CB$  равна радиусу основания. Прямая  $AB$  образует с плоскостью основания цилиндра угол равный  $\arccos \frac{2}{3}$ .

а) Докажите, что в трапецию  $ABCD$  можно вписать окружность.

б) Найдите угол между плоскостью основания цилиндра и плоскостью  $ABCD$ .

Задания 13 профильного ЕГЭ. Фигуры вращения: цилиндр, конус, шар

**21В.** Прямоугольник  $ABCD$  является осевым сечением цилиндра ( $AB$  и  $CD$  - образующие). Диаметры  $AD$  и  $KM$  пересекаются в точке  $O$  под прямым углом и  $DO = CD$ .

а) Докажите, что площадь поверхности цилиндра относится к площади описанной около этого цилиндра сферы как  $4 : 5$ .

б) Найдите площадь сечения цилиндра, проходящего через точки  $K$ ,  $M$  и  $B$ , если  $AB = 8$ .

### ОТВЕТЫ

**1В.**  $4\pi$ . **2В.**  $\arctg \frac{2}{3}$ . **3В.**  $8 : 3$ . **4В.**  $\arctg \frac{21}{17}$ . **5В.**  $0,8$ . **6В.**  $64 + 32\sqrt{3}$ . **7В.**  $\frac{64}{3}$ . **8В.**  $\frac{6\sqrt{7}}{5}$ . **9В.**  $4500\pi$ . **10В.**  $144\pi$ . **11В.**  $3\sqrt{66}$ . **12В.**  $90^\circ$ . **13В.**  $45^\circ$ . **14В.**  $2\pi$ . **15В.**  $60$ . **16В.**  $\arcsin \frac{3\sqrt{17}}{17}$ . **17В.**  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ . **18В.**  $8\pi$ . **19В.**  $\arccos \frac{5}{16}$ . **20В.**  $\arccos \frac{\sqrt{6}}{4}$ . **21В.**  $32\sqrt{2}\pi$ .