

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 13 профильного ЕГЭ по теме «Угол между прямыми». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

Угол между двумя прямыми. Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых. Очевидно, $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$. Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся. Для нахождения этого угла, как правило, используют теорему косинусов. Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° . Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Нахождение угла между прямыми координатным методом. 1) Находим координаты двух точек на каждой из прямых. 2) Находим координаты векторов (для этого из координат конца вычитаем соответствующие координаты начала). 3) Используя скалярное произведение векторов, находим косинус угла между этими векторами, который и будет являться косинусом угла между прямыми,

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где x_1, y_1, z_1 координаты вектора \vec{a} , а x_2, y_2, z_2 координаты вектора \vec{b} .

4) Если косинус получился равен отрицательному значению, то берем это значение по модулю.

Уровень А

1А. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, K – середины ребер $A_1 B_1$ и DD_1 соответственно. Найдите углы между прямыми:

- а) BB_1 и CD ; б) BB_1 и BD ; в) AB_1 и CD_1 ; г) AB_1 и BC_1 ; д) CA_1 и BC_1 ;
е) AE и BD_1 ; ж) AE и BC_1 ; з) CK и AC_1 .

2А. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ к диагонали $A_1 C$ провели перпендикуляры из вершин A и B . Найдите угол между этими перпендикулярами.

3А. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ к диагонали AC_1 провели перпендикуляры из середин ребер AB и AD . Найдите угол между этими перпендикулярами.

4А. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точки K, M и N — середины ребер BD, AB и AC соответственно. Найдите углы между прямыми:

- а) AB и CD ; б) DM и BC ; в) DM и BN ; г) AK и BN .

5А. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Все ребра пирамиды равны, M — середина бокового ребра SD . Найдите углы между прямыми:

- а) AS и BD ; б) AS и CD ; в) SA и CM ; г) SB и CM .

6А. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) боковое ребро равно стороне основания. Точка M – середина ребра SB . Найдите угол между прямыми CM и SO , где точка O – центр основания пирамиды.

7А. Ребра AD и BC пирамиды $DABC$ равны 6 и 8. Расстояние между серединами ребер BD и AC равно 5. Найдите угол между прямыми AD и BC .

8А. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S), все рёбра которой равны 1, точки E, F – середины ребер соответственно SB и SC . Найдите угол между прямыми AE и BF .

9А. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания ABC . Точка M — середина ребра BC . Найдите углы между прямыми:

а) AC и B_1C_1 ; б) AA_1 и BC_1 ; в) AM и BC_1 ; г) BC_1 и CA_1 .

10А. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания $ABCDEF$. Найдите углы между прямыми:

а) EA_1 и AB ; б) BE_1 и AF ; в) BD_1 и CD ; г) BE_1 и AB_1 .

11А. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите углы между прямыми:

а) SB и AF ; б) SC и AE ; в) SB и AE ; г) SB и AD .

12А. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S), стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, точка K – середина ребра SD . Найдите угол между прямыми AS и FK .

ОТВЕТЫ

1А. а) 90° ; б) 90° ; в) 90° ; г) 60° ; д) 90° ; е) $\arccos \frac{\sqrt{15}}{15}$; ж) $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$; з) $\arccos \frac{\sqrt{15}}{15}$. **2А.** 60° . **3А.** 60° . **4А.** а) 90° ; б) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$; в) $\arccos \frac{1}{6}$; г) $\arccos \frac{2}{3}$. **5А.** а) 90° ; б) 60° ; в) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$; г) $\arctg \sqrt{2}$. **6А.** $\arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$. **7А.** 90° . **8А.** $\arccos \frac{1}{6}$. **9А.** а) 60° ; б) 45° ; в) 90° ; г) $\arccos \frac{1}{4}$. **10А.** а) 90° ; б) $\arctg \frac{1}{2}$; в) $\arccos \frac{3}{4}$; г) 90° . **11А.** а) 60° ; б) 90° ; в) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$; г) $\arccos \frac{1}{4}$. **12А.** $\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Уровень В

1В. Дана треугольная пирамида $ABCD$.

а) Постройте её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно рёбрам AD и BC .

б) Найдите угол между прямыми AD и BC , если $AD = 24$, $BC = 10$, а расстояние между серединами рёбер BD и AC равно 13.

2В. Точка K лежит на ребре AD треугольной пирамиды $ABCD$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью α , проходящей через точку K параллельно рёбрам AB и CD .

б) Пусть M — точка пересечения плоскости α с ребром BC . Найдите угол между прямыми AB и CD , если K — середина ребра AD , $AB = 8$, $CD = 6$, $KM = 5$.

3В. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M — середина бокового ребра SC .

а) Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью грани ESF .

б) Найдите угол между прямыми BM и DE .

4В. Точка G лежит на боковом ребре SC правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ с вершиной S .

а) Постройте точку пересечения прямой BG с плоскостью боковой грани ESF .

б) Найдите угол между прямыми BG и AD , если стороны основания пирамиды равны 6, боковые рёбра равны $3\sqrt{13}$, а $SG : GC = 1 : 2$.

5В. Основания призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонние треугольники. Точки M и M_1 — центры оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми BM и C_1M_1 равен 60° .

б) Найдите угол между прямыми BM_1 и C_1M , если призма прямая и $AB : AA_1 = 3 : 2$.

6В. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Точка M — середина ребра AB . Известно, что $AB = 2AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и MB_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми AC_1 и MB_1 .

7В. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми BF_1 и CD_1 .

8В. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

а) Докажите, что плоскости AB_1F и ACC_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми AB_1 и CF_1 , если $AA_1 = AB\sqrt{2}$.

9В. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка K — середина ребра SD .

а) Плоскость проходит через точку K параллельно медианам BM и SN граней BSC и ASD . Постройте прямую пересечения этой плоскости с плоскостью основания пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми BM и SN , если пирамида $SABCD$ правильная, причём все её рёбра равны.

10В. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки K и L — центры граней $BB_1 C_1 C$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

а) Докажите, что точка пересечения прямой KL с плоскостью основания $ABCD$ равноудалена от вершин B и C .

б) Пусть M — середина ребра CD . Найдите котангенс угла между прямыми MD_1 и KL , если известно, что $AB = 2AA_1$.

11В. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M — середина ребра $A_1 B_1$.

а) Докажите, что любая плоскость, проведённая через точку M параллельно диагонали CA_1 параллелепипеда, проходит через центр грани $BB_1 C_1 C$.

б) Найдите угол между прямыми BM и CB_1 , если параллелепипед прямоугольный, $AB = 2BC$ и $CC_1 : BC = 4 : 3$.

12В. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$, высота пирамиды проходит через точку D .

а) Докажите, что все боковые грани пирамиды — прямоугольные треугольники.

б) Пусть M — середина бокового ребра SC . Найдите угол между прямыми AM и BC , если известно, что отношение высоты пирамиды к стороне её основания равно $\sqrt{11}$.

13В. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Точки M и N — середины рёбер AB и SC .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую MN параллельно SA .

б) Найдите угол между прямыми SA и MN , если боковое ребро пирамиды равно стороне основания.

14В. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Высота пирамиды проходит через точку B .

а) Докажите, что отрезок, соединяющий середины рёбер BC и AD , равен отрезку, соединяющему середины рёбер AB и CD .

б) Найдите угол между прямой BD и прямой, проходящей через середины рёбер BC и AD , если известно, что $BD = AC$.

15В. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. На ребре BC взята точка M , причём $BM : CM = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через центры граней $A_1B_1C_1$ и BB_1C_1C параллельно ребру AC , проходит через точку M .

б) Пусть K — середина ребра A_1C_1 , N — центр грани BB_1C_1C . Найдите угол между прямыми B_1K и MN , если $AC = 18\sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{13}$.

16В. Основание призмы $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$.

а) Постройте точку пересечения прямой B_1E с плоскостью ACD_1 .

б) Найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1 , если призма правильная, а $AA_1 : AB = \sqrt{3} : 1$.

17В. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость, проходящая через центр основания $A_1B_1C_1$ и середину K ребра BC , параллельна прямой AB . Эта плоскость пересекает прямую CC_1 в точке L .

а) Докажите, что $CL = 3CC_1$.

б) Найдите угол между прямыми KL и AC_1 , если $\angle ACB = 90^\circ$ и $AA_1 = AC = \frac{1}{4}BC$.

18В. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и прямым углом при вершине A , причём $BC = 2AD$. Высота пирамиды проходит через точку A .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AD и середину M ребра SC , — прямоугольник.

б) Найдите косинус угла между прямыми AM и CD , если известно, что $AD = AB$ и $SA = \sqrt{3}AB$.

19В. В основании пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Высота пирамиды проходит через точку A , SH — высота треугольника BSC . Известно, что $BC = 2AD$, $AB = AD = 2SA$.

а) Докажите, что $SH = CD$.

б) Найдите косинус угла между прямыми CD и SH .

20В. Основание $ABCD$ прямой призмы $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — ромб с острым углом 60° при вершине A . Точка M — середина ребра CD , точка H лежит на стороне AB , причём DH — высота ромба $ABCD$.

а) Докажите, что $D_1M \perp DH$.

б) Найдите угол между прямыми MD_1 и BC_1 , если $\angle ABA_1 = 60^\circ$.

21В. Основание прямой призмы $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 2BC$ и боковой стороной $AB = BC$.

а) Докажите, что $AB \perp DB_1$.

б) Найдите угол между прямыми CD_1 и DB_1 , если боковая грань AA_1D_1D — квадрат.

22В. Две правильные пирамиды $DABC$ и $FABC$ имеют общее основание ABC и расположены по разные стороны от него. Все плоские углы при вершинах D и F прямые.

а) Докажите, что угол между плоскостями ADB и AFB равен углу между прямыми CD и CF .

б) Найдите угол между прямыми AD и BF , если боковые рёбра каждой пирамиды равны 1.

23В. Две правильные четырёхугольные пирамиды $EABCD$ и $FABCD$ имеют общее основание $ABCD$ и расположены по разные стороны от него. Точки M и N — середины рёбер BC и AB соответственно. Все рёбра пирамид равны.

а) Докажите, что угол между прямыми AE и BF равен 60° .

б) Найдите угол между прямыми EM и FN .

24В. Основание пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Высота пирамиды проходит через точку B . Точки M и N — середины рёбер AD и BC соответственно.

а) Докажите, что MN является биссектрисой угла BMC .

б) Найдите угол между прямыми BD и MN , если $BD = 6\sqrt{2}$, $AC = 16$.

ОТВЕТЫ

- 1В.** 90° . **2В.** 90° . **3В.** 90° . **4В.** 60° . **5В.** $\arccos \frac{11}{14}$. **6В.** $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$. **7В.** $\arccos \frac{11\sqrt{10}}{40}$. **8В.** 90° . **9В.** $\arccos \frac{1}{6}$. **10В.** 3. **11В.** $\arccos \frac{16}{25}$. **12В.** 60° . **13В.** 30° . **14В.** 45° . **15В.** $\arccos \frac{9}{11}$. **16В.** $\arccos \frac{\sqrt{6}}{4}$. **17В.** $\arccos \frac{3\sqrt{26}}{26}$. **18В.** $\frac{3}{4}$. **19В.** $\frac{3}{4}$. **20В.** $\arccos \frac{11\sqrt{13}}{52}$. **21В.** $\arccos \frac{\sqrt{35}}{14}$. **22В.** $\arccos \frac{2}{3}$. **23В.** $\arccos \frac{2}{3}$. **24В.** $\arctg \frac{4\sqrt{2}}{3}$.