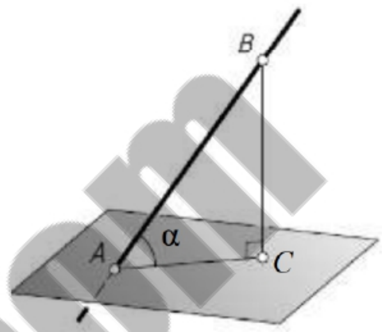
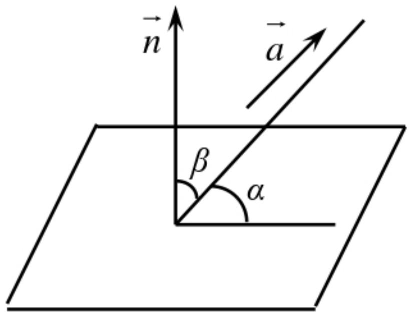
УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 13 профильного ЕГЭ по теме «Угол между прямой и плоскостью». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

Угол между прямой и плоскостью. *Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой* называется угол между этой прямой (AB) и ее проекцией на данную плоскость (AC), т.е. синус этого угла α равен отношению противолежащего катета BC к гипотенузе AB. На практике нахождение этого угла чаще всего сводится к нахождению расстояния от точки до плоскости, т.е. к нахождению длины отрезка BC. Очевидно, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90°. Если прямая параллельна плоскости или лежит в ней, то угол между ними считается равным нулю.



Нахождение угла между прямой и плоскостью координатным методом. Пусть $\vec{a}$ - вектор лежащий на прямой (или параллельный ей), который еще называют **направляющим вектором прямой,** а вектор n - это вектор перпендикулярный плоскости (нормальный вектор плоскости). Искомый угол - это угол α. Используя скалярное произведение находим косинус угла β: $\cos\beta = \dfrac{\vec{a}\,\vec{n}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}$. Так как $\beta = 90^\circ - \alpha$,



то последняя формула примет вид: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{a}\,\vec{n}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}$.

Уровень А

1А. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы: а) между прямой BD_1 и плоскостью ACC_1; б) между прямой A_1B_1 и плоскостью C_1BD; в) между прямой BB_1 и плоскостью ACD_1; г) между прямой BD и плоскостью ADC_1.

2А. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точки K, M и N — середины рёбер BD, AB и AC соответственно. Найдите углы: а) между прямой CD и плоскостью ABD; б) между прямой DM и плоскостью ADC; в) между прямой KN и плоскостью ADC; г) между прямой BD и плоскостью KMN.

3А. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны, K — середина бокового ребра SC. Найдите углы: а) между прямой BK и плоскостью ABC; б) между прямой AC и плоскостью ASB; в) между прямой AK и плоскостью BSC; г) между прямой SA и плоскостью CSD.

4А. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка M — середина ребра BC. Найдите углы: а) между прямой A_1M и плоскостью ABC; б) между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1; в) между прямой C_1M и плоскостью ABB_1; г) между прямой AA_1 и плоскостью A_1C_1M.

5А. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1. Найдите углы: а) между прямой AA_1 и плоскостью BCE_1; б) между прямой BC_1 и плоскостью AFF_1; в) между прямой BD_1 и плоскостью ABB_1; г) между прямой BE_1 и плоскостью ABB_1.

6А. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите углы: а) между прямой BC и плоскостью ASF; б) между прямой AB и плоскостью BSC; в) между прямой SA и плоскостью BSC; г) между прямой AC и плоскостью CSD.

7А. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 3,\ AD = 8,\ AB = 6,$ найдите угол между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

8А. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого угол C равен 90 , а угол A равен 30 , $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани B_1C составляет угол 30 с плоскостью AA_1B_1. Найдите высоту призмы.

ОТВЕТЫ

1А. а) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) 30°. **2А.** а) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 45°. **3А.** а) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\arcsin\frac{2\sqrt{30}}{15}$; г) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. **4А.** а) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{10}$; г) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}$. **5А.** а) 60°; б) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$; в) 60 ; г) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$. **6А.** а) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$; в) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{10}$; г) $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **7А.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$. **8А.** $10\sqrt{2}$.

Уровень В

1В. Основание треугольной пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC $\left(\angle C = 90^\circ\right)$. Высота пирамиды проходит через точку C.

а) Докажите, что противоположные рёбра пирамиды попарно перпендикулярны.

б) Найдите углы, которые образуют боковые рёбра DA и DB с плоскостью основания, если $AC = 15$, $BC = 20$, а угол между плоскостями ABC и ABD равен 45°.

2В. Высота PC треугольной пирамиды $PABC$ с вершиной P проходит через точку C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что основание пирамиды — прямоугольный треугольник.

б) Найдите углы, которые образуют боковые рёбра PA и PB с плоскостью основания, если $AC = 6$, $BC = 8$, а расстояние от точки P до прямой AB равно 5.

3В. Дана треугольная пирамида $SABC$ с основанием ABC; O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую AB и середину отрезка SO, делит боковое ребро SC в отношении 1 : 3, считая от вершины S.

б) Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды, если пирамида правильная, а её высота составляет $\dfrac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB.

4В. Дана треугольная пирамида $SABC$; O — точка пересечения медиан основания ABC.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую AB и середину M ребра SC, делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины S.

б) Найдите угол между прямой BC и плоскостью ABM, если пирамида правильная, а угол между прямой, проходящей через точку M и середину ребра AB, и прямой SO равен 45°.

5В. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AD = 2$, $AA_1 = 4$, $AB = 2\sqrt{15}$. Точка M — середина ребра C_1D_1, точка N лежит на ребре AA_1, причём $AN = 3$.

а) Докажите, что $MN \perp CB_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью грани BB_1C_1C.

6В. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$, основание которой — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и катетом BC, вдвое бóльшим бокового ребра призмы. Точка M — середина ребра A_1C_1, точка N лежит на ребре BC, причём $CN : NB = 1 : 3$.

а) Докажите, что $MN \perp CB_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $AA_1 : AB = 1 : \sqrt{7}$.

7В. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$. Скрещивающиеся диагонали BA_1 и CB_1 боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C перпендикулярны.

а) Докажите, что $AB : AA_1 = \sqrt{2} : 1$.

б) Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BCC_1.

8В. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра B_1C_1. Прямые CA_1 и BM перпендикулярны.

а) Докажите, что диагональ основания призмы вдвое больше бокового ребра.

б) Найдите угол между прямой CA_1 и плоскостью BCC_1.

9В. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — параллелограмм $ABCD$. Точка K — середина медианы SM грани CSD, N — середина ребра AB.

а) Постройте точку пересечения прямой KN с плоскостью ASC.

б) Найдите угол между прямой KN и плоскостью ASC, если пирамида правильная, а её боковые грани образуют с плоскостью основания углы, равные 60 .

10В. Дана треугольная пирамида $DABC$. Точки M и N — середины рёбер BC и AD, L — середина ребра AB.

а) Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью CDL.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью CDL, если пирамида правильная, а угол между её боковым ребром и плоскостью основания ABC равен 60 .

11В. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Точка M — середина ребра SD.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, B и M.

б) Найдите угол между прямой AM и плоскостью CSF, если $AB : SA = 1 : \sqrt{19}$.

12В. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AB и середину высоты SH пирамиды.

б) Пусть K — точка пересечения этой плоскости с ребром SC. Найдите угол между прямой BK и плоскостью ASB, если $AB : AS = 1 : 2$.

13В. Точка M — середина ребра AB правильного тетраэдра $DABC$.

а) Докажите, что ортогональная проекция точки M на плоскость ACD лежит на медиане AP грани ACD.

б) Найдите угол между прямой DM и плоскостью ACD.

14В. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны. Точка M — середина ребра BC.

а) Докажите, что ортогональная проекция середины ребра AB на плоскость CSD делит медиану SN этой грани в отношении $1 : 2$, считая от вершины S.

б) Найдите угол между прямой SM и плоскостью CSD.

15В. Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равнобедренная трапеция с основаниями AB и CD. Боковые стороны равны меньшему основанию CD, а их продолжения пересекаются под углом 60 .

а) Плоскость CA_1D_1 пересекает ребро AB в точке M. Докажите, что прямая D_1M проходит через середину диагонали A_1C.

б) Найдите угол между боковым ребром BB_1 и плоскостью CA_1D_1, если призма прямая, а $AA_1 : AD = \sqrt{3} : 2$.

16В. Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — трапеция с основаниями $AB = 2CD$.

а) Докажите, что плоскость BA_1D_1 проходит через середину бокового ребра CC_1.

б) Найдите угол между боковым ребром AA_1 и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция $ABCD$ прямоугольная с прямым углом при вершине B, а $BC = CD$ и $AA_1 = \sqrt{6}CD$.

17В. Точка M — середина медианы BK основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, а N — центр боковой грани AA_1B_1B.

а) Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью $A_1B_1C_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью грани BB_1C_1C, если известно, что $\dfrac{AB}{AA_1} = 2\sqrt{2}$.

18В. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка N — центр боковой грани AA_1B_1B, а M — точка пересечения медиан основания ABC.

а) Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью $A_1B_1C_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью BB_1C, если известно, что $\dfrac{AB}{AA_1} = 2\sqrt{3}$.

19В. Основания ABC и $A_1B_1C_1$ призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр O основания ABC с серединой ребра A_1B_1, перпендикулярен основаниям призмы.

а) Докажите, что грань ABB_1A_1 — прямоугольник.

б) Найдите угол между прямой BC и плоскостью ABC_1, если высота призмы равна стороне основания.

20В. Основания ABC и $A_1B_1C_1$ призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр O основания ABC с вершиной C_1, перпендикулярен основаниям призмы.

а) Докажите, что плоскости ABC_1 и OCC_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1, если боковое ребро призмы равно стороне основания.

21В. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 6. Точка M – середина ребра A_1C_1, O – точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что точка пересечения OC_1 с четырехугольником, являющимся сечением призмы плоскостью ABM, совпадает с точкой пересечения диагоналей этого четырехугольника.

б) Найдите угол между прямой OC_1 и сечением призмы плоскостью ABM.

ОТВЕТЫ

1В. $\operatorname{arctg}\frac{4}{5}$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$. **2В.** $\operatorname{arctg}\frac{7}{30}$; $\operatorname{arctg}\frac{7}{40}$. **3В.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **4В.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **5В.** 60°. **6В.** 45°. **7В.** 45°. **8В.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$. **9В.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **10В.** $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$. **11В.** 30°. **12В.** $\operatorname{arcctg}3$. **13В.** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. **14В.** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. **15В.** 45°. **16В.** 30°. **17В.** 45°. **18В.** $\operatorname{arcctg}2$. **19В.** $\arcsin\frac{3\sqrt{7}}{14}$. **20В.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **21В.** $\arccos\frac{13}{14}$.