УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 13 профильного ЕГЭ по теме «Угол между плоскостями». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

Угол между плоскостями. Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру. Величина двугранного угла принадлежит интервалу $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку $0^\circ < \alpha \le 90^\circ$. Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным нулю.

Нахождение угла сводится непосредственно к построению и вычислению величины линейного угла двугранного угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями. Соответствующий линейный угол строится с помощью двух перпендикуляров, проведенных в указанных плоскостях к прямой их пересечения, а его величина в дальнейшем находится либо из некоторого прямоугольного треугольника, либо из некоторого треугольника с помощью теоремы косинусов.

Часто чтобы построить линейный угол между двумя плоскостями находят отрезок перпендикулярный к одной из плоскостей и концы которого лежат в этих плоскостях. Затем из основания этого перпендикуляра проводят прямую перпендикулярно к линии пересечения этих двух плоскостей и тогда перпендикуляр из другого конца отрезка к линии пересечения плоскостей автоматически попадет в ту же точку (по теореме о трех перпендикулярах).

В некоторых задачах является эффективным метод, при котором вместо угла между пересекающимися плоскостями ищется угол между плоскостями, параллельными рассматриваемым (или между одной из данных плоскостей и плоскостью, параллельной другой из них).

Также не следует забывать, что **угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, которые к этим плоскостям перпендикулярны,** т.е. нахождение угла между плоскостями можно свести к нахождению угла между прямыми.

Также при нахождении угла между двумя плоскостями можно использовать **теорему о площади ортогональной проекции многоугольника**. При применении этого метода угол φ между плоскостями α и β можно вычислить, используя формулу $\cos\varphi = \frac{S_{\text{пр}}}{S}$, где S - площадь многоугольника, лежащего в плоскости α, $S_{\text{пр}}$ - площадь его ортогональной проекции на плоскость β. Обычно этот метод применяют при вычислении угла между плоскостью сечения и плоскостью какой-либо грани многогранника (часто в качестве такой грани выступает основание пирамиды или призмы). Этот метод применяют, когда нахождение площадей является более простой задачей, чем непосредственное вычисление двугранного угла.

Нахождение угла между плоскостями координатным методом. Так как угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми которые к этим плоскостям перпендикулярны, то можно сказать, что угол между плоскостями равен углу между нормальными векторами этих плоскостей. Поэтому если удалось найти нормальные вектора этих плоскостей $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$, то используя скалярное произведение находят косинус угла между ними, который будет являться косинусом угла между плоскостями. Если косинус получился равен отрицательному значению, то берем это значение по модулю.

Уровень А

1А. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями: а) BCC_1 и ABC_1; б) ABC и CB_1D_1; в) ACD_1 и AB_1D_1; г) ABC_1 и BCD_1; д) AB_1C и DCC_1.

2А. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точки K и M — середины рёбер BD и CD соответственно. Найдите углы между плоскостями:
а) AKC и ABD; б) AMB и ABC; в) AKM и ABC.

3А. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка S – вершина. Точка M – середина ребра SA, точка K – середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC = 6$, $AB = 4$.

4А. В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 6. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM – точка L. Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

5А. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M сторона основания AB равна 6. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK : KB = 5 : 1$. Сечение MKC является равнобедренным треугольником с основанием MK. Найдите угол между боковыми гранями пирамиды.

6А. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

7А. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны, E — середина бокового ребра SC. Найдите углы между плоскостями:
а) SAD и SBC; б) ABC и SCD; в) ABC и BDE; г) BSC и DSC; д) ABE и ABC.

8А. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка S – вершина. Точка M – середина ребра SA, точка K – середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 10$, $SC = 8$.

9А. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостями ABC и ACM, где точка M делит ребро BS так, что $BM : MS = 2 : 1$.

10А. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания ABC. Точка M — середина ребра BC. Найдите углы между плоскостями:

а) AA_1M и ABC; б) ABC и CA_1B_1; в) ACB_1 и BA_1C_1; г) A_1C_1M и $A_1B_1C_1$.

11А. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

12А. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.

13А. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = 5$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 13.

14А. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 6$. Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

15А. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 5$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

16А. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания $ABCDEF$. Найдите углы между плоскостями:

а) ABC и DB_1F_1; б) AFF_1 и DEE_1; в) AFF_1 и BCC_1; г) AFF_1 и BDD_1.

17А. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите углы между плоскостями:

а) ABC и SEF; б) SBD и ABC; в) SBC и SEF; г) SAF и SBC.

ОТВЕТЫ

1А. а) 90°; б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; в) $\arccos\frac{1}{3}$; г) 60°; д) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **2А.** а) 90°; б) $\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **3А.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}}{5}$. **4А.** $\operatorname{arctg}2$. **5А.** $2\arcsin\frac{\sqrt{682}}{44} = \arccos\frac{13}{44}$. **6А.**

$\arccos\frac{7}{32}$. **7А.** а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 45°; г) $\arccos\frac{1}{3}$; д) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}$. **8А.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{10}$. **9А.** $\operatorname{arctg}\frac{8}{3}$. **10А.** а) 90°; б) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) $\arccos\frac{1}{7}$; г) $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **11А.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$. **12А.** 45°. **13А.** 45°. **14А.** $\arccos\frac{9}{41}$. **15А.** $\operatorname{arctg}\frac{24}{25}$. **16А.** а) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$; б) 60°; в) 60°; г) 30°. **17А.** а) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$; в) $\arccos\frac{3}{5}$; г) $\arccos\frac{1}{5}$.

Уровень В

1В. Сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

2В. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра C_1D_1, а точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 3$. Через точки K и M проведена плоскость α, параллельная прямой BD и пересекающая диагональ A_1C в точке O.

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ A_1C в отношении $A_1O : OC = 3 : 5$.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

3В. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

4В. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 2 : 5$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 6$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 5$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

5В. Основание пирамиды совпадает с одной из граней куба, а вершина — с центром противоположной грани.

а) Докажите, что пирамида правильная.

б) Найдите угол между плоскостями её соседних боковых граней.

6В. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D. Точка M — середина ребра AB, N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CD.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой AB.

б) Найдите угол между боковыми гранями пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60°.

7В. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Точка O — центр основания, K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую SC.

а) Докажите, что прямая OK перпендикулярна прямой BD.

б) Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60°.

8В. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Диагонали AD и CE основания пересекаются в точке P, Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую SD.

а) Докажите, что прямая PQ перпендикулярна прямой CE.

б) Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60°.

9В. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

10В. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 3$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

11В. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды лежит в грани CSD.

а) Докажите, что прямые AD и SC перпендикулярны.

б) Известно, что $AB:BC = 2\sqrt{3}:1$, высота пирамиды проходит через середину ребра CD, а угол между боковой гранью BSC и плоскостью основания равен 45°. Найдите углы, которые образуют с плоскостью основания плоскости остальных боковых граней.

12В. Основание пирамиды $ABCD$ — прямоугольный треугольник ABC. Высота пирамиды проходит через середину гипотенузы AB.

а) Докажите, что боковые рёбра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания.

б) Известно, что $BC:AC = \sqrt{3}:1$, а угол между боковой гранью BDC и плоскостью основания равен 60°. Найдите углы, которые образуют с плоскостью основания плоскости двух других боковых граней.

13В. Точки M и N — середины боковых рёбер соответственно AA_1 и CC_1 прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отрезок, соединяющий вершину B_1 с серединой ребра AC, делится плоскостью BMN в отношении $2 : 1$, считая от точки B_1.

б) Найдите угол между плоскостями AA_1C_1 и MBN, если $AB = BC = 15$, $AC = 24$ и $AA_1 = 144$.

14В. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 5, боковые рёбра равны 2, точка D — середина ребра CC_1.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

15В. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S все рёбра равны.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAD с плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS.

б) Найдите угол между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS.

16В. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями B_1CE_1 и ABC.

17В. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1, причём $BE = 1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

18В. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 4 : 3$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 5$, $AD = 8$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $2 : 5$.

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

19В. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4, а высота призмы равна $\sqrt{17}$. Точка E лежит на диагонали BD_1, причём $BE = 1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью ABC.

20В. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью D_1MK.

б) Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.

21В. В треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB, O — точка пересечения медиан основания.

а) Докажите, что плоскость CMK делит отрезок SO в отношении 3 : 2, считая от вершины S.

б) Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если пирамида правильная, $SC = 6$, $AB = 4$.

22В. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$ с центром O. Точка M — середина ребра SC, K — середина ребра SA.

а) Докажите, что плоскость BMK делит ребро SD в отношении 1 : 2, считая от вершины S.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если пирамида правильная, $AB = 10$, $SC = 8$.

23В. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через прямую BD_1 проведена плоскость α, параллельная прямой AC.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью α.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если $AB = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

24В. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 4. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B – точка Q, причем $AP = BQ = SA$.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

25В (ЕГЭ 2017). Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна $3\sqrt{2}$, а BC равна 6. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершин A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ.

а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ.

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC, если ребро SD равно 9.

ОТВЕТЫ

1В. $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$. **2В.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3В.** $\operatorname{arctg}3$. **4В.** $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{29}}{10}$. **5В.** $\arccos\frac{1}{5}$. **6В.** $\arccos\frac{5}{13} = 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **7В.** $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$. **8В.** $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$. **9В.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. **10В.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{3}$. **11В.** 90°, 45, 60. **12В.** 90°, 45. **13В.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$. **14В.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$. **15В.**

90 . **16В.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **17В.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **18В.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{41}}{5}$. **19В.** $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{34}}{10}$. **20В.** 45 . **21В.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}}{5}$. **22В.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{10}$. **23В.** $\operatorname{arctg}\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$. **24В.** $\arccos\frac{8\sqrt{195}}{195}$. **25В.** $\arccos\frac{\sqrt{34}}{68}$.