

ТРЕУГОЛЬНИК И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ

Теоремы о медианах треугольника

1) Медианы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка называется центром тяжести треугольника) и делятся этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника, $AM = 2MA_1$, $BM = 2MB_1$, $CM = 2MC_1$.

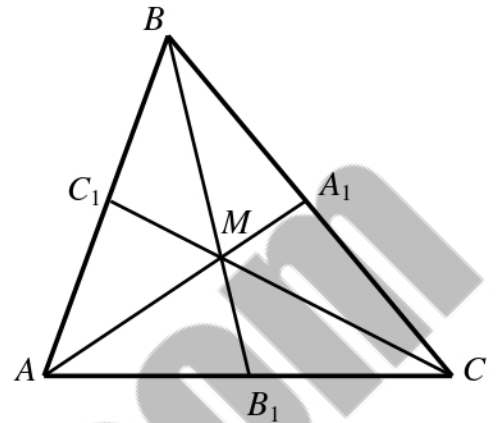
2) Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника (на треугольники с равными площадями), например, $S_{\Delta ABB_1} = S_{\Delta CBB_1}$.

3) Все медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников, т.е.

$$S_{\Delta AMB_1} = S_{\Delta AMC_1} = S_{\Delta BMC_1} = S_{\Delta BMA_1} = S_{\Delta CMA_1} = S_{\Delta CMB_1}.$$

4) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

5) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.



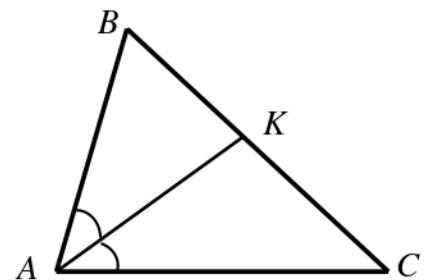
Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника: серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Теорема о высотах треугольника: прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема о биссектрисах треугольника: биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Свойство биссектрисы треугольника: биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим

сторонам, т.е. $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}$.

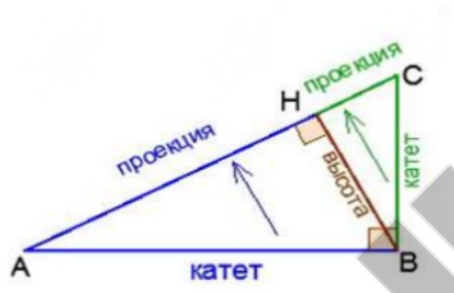
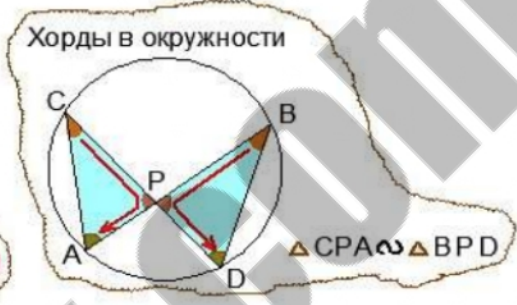
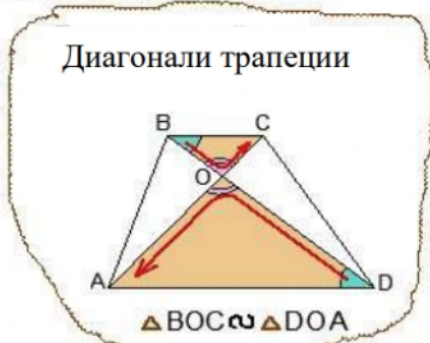


Длина биссектрисы треугольника: $AK = \sqrt{AB \cdot AC - BK \cdot CK}$.

Формула для медианы треугольника: если m_c – медиана треугольника, проведенная к стороне c , то $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b – остальные стороны треугольника.

Задания 16 профильного ЕГЭ. Треугольник и его элементы

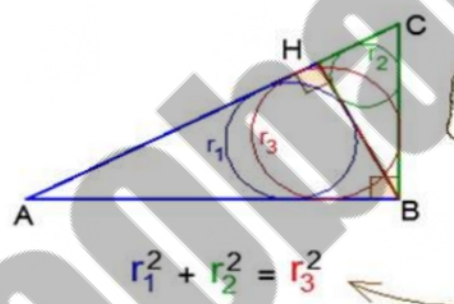
Типичные случаи подобия треугольников



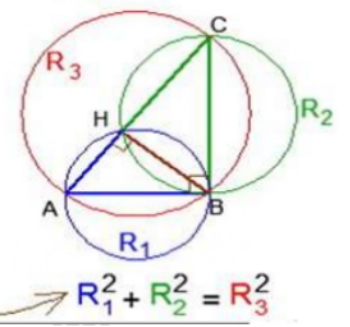
$\triangle АНВ \sim \triangle ABC \rightarrow AB = \sqrt{AH \cdot AC}$
проекция гипотенуза

$\triangle ABC \sim \triangle ВНС \rightarrow BC = \sqrt{CH \cdot AC}$
проекция гипотенуза

$\triangle АНВ \sim \triangle ВНС \rightarrow BH = \sqrt{AH \cdot CH}$



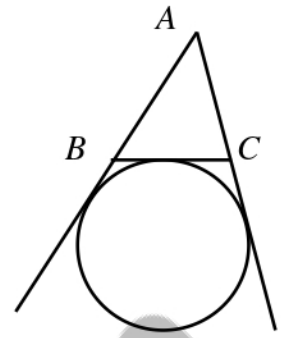
Интересные следствия подобия в прямоугольном треугольнике



Площади подобных треугольников: отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Отношение сторон подобных треугольников равно отношению любых соответствующих линейных размеров.

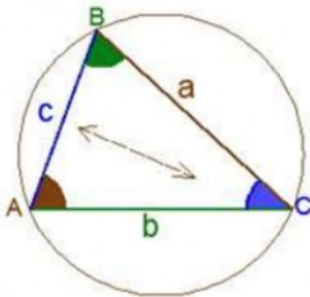
Центр окружности описанной вокруг прямоугольного треугольника находится на середине гипотенузы: $R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = p-c$, где a, b – катеты, а c – гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно; p – полупериметр треугольника.

Вневписанная окружность. Окружность называют окружностью, вневписанной в треугольник, или вневписанной окружностью, если она касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. У каждого треугольника существуют три вневписанные окружности. Центр вневписанной окружности, изображенной на рисунке, лежит в точке пересечения биссектрисы внутреннего угла A и двух биссектрис внешних углов B и C , а окружность касается стороны BC .



Радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC , вычисляется по формуле $r = \frac{S}{p - BC}$, где S – площадь треугольника ABC , а p – его полупериметр.

Теорема синусов:

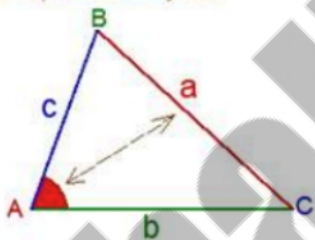


Теоремы синусов и косинусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R !!!$$

R - радиус описанной окружности

Теорема косинусов:



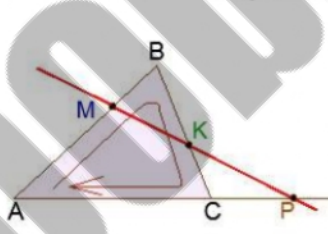
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Как найти косинус угла в треугольнике:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

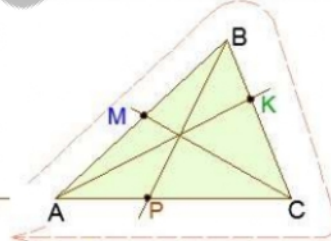
Если $\cos A < 0 \Rightarrow \angle A$ - тупой

Теорема Менелая, Чевы и Птолемея:



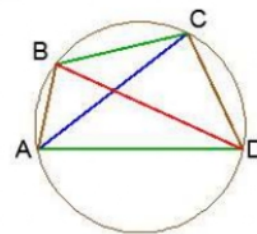
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

теорема Менелая



$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

теорема Чевы



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

теорема Птолемея

Во многих случаях для решения задачи удобно применить следующее дополнительное построение, которое называют **удвоением медианы**.

На продолжении медианы AM треугольника ABC за точку M отложим отрезок MD , равный AM . Тогда диагонали AD и BC четырёхугольника $ABDC$ точкой пересечения M делятся пополам, значит, $ABDC$ — параллелограмм. Далее применяем свойства параллелограмма.

Следствие из теоремы косинусов: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, т.е. $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, где d_1 и d_2 диагонали параллелограмма, а a и b стороны параллелограмма.

Высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, удобно находить так: вычислить двумя способами площадь треугольника — как половину произведения катетов и как половину произведения гипотенузы на искомую высоту — и затем из полученного равенства выразить эту высоту. Таким образом, **высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна произведению катетов, делённому на гипотенузу**.

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 16 профильного ЕГЭ по теме «Треугольник и его элементы». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

Уровень А

1А. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 96, а стороны пропорциональны числам 3, 4, 5.

2А. Периметр треугольника ABC равен 75. Найдите стороны треугольника, если сторона AC вдвое больше стороны AB , а сторона BC на 10 меньше стороны AC .

3А. Периметр равнобедренного треугольника равен 32. Основание относится к боковой стороне как 6 : 5. Определите стороны треугольника.

4А. В треугольнике ABC известно: $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 5$, $\angle A = 45^\circ$. Найдите AB .

5А. В треугольнике даны стороны $a = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$. Угол A , противолежащий стороне a , равен 30° . Найдите третью сторону.

6А. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 1. Найдите длину гипотенузы.

7А. Определите острые углы прямоугольного треугольника, длины сторон которого образуют геометрическую прогрессию.

8А. В треугольнике ABC найдите отношение $BC : AC$, если известно, что $\angle A = 120^\circ$ и $AB : AC = 2$.

9А. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как $2 : 1$. В каком отношении, считая от вершины, она делит боковые стороны?

10А. Определите, чему равна длина стороны треугольника, лежащей против тупого угла, если длины двух других сторон равны 7 и 8 , а площадь треугольника равна $14\sqrt{3}$.

11А. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка B_1 так, что $AB_1 : B_1C = 2 : 3$. Найдите площадь треугольника BB_1C , если $S_{ABC} = 30$.

12А. В прямоугольном треугольнике длины медиан острых углов равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найдите длину гипотенузы.

13А. Найдите расстояние от точки пересечения медиан прямоугольного треугольника до его катета, равного 12 , если гипотенуза равна 15 .

14А. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$, $BC = 10$, отрезки BM и CK – высоты. Найдите отрезок KM .

15А. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 4$ проведена высота CK . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $BK : BA = 4 : 5$.

16А. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и к боковой стороне, равны соответственно 10 и 12 . Найдите площадь треугольника.

17А. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки $2,8$ и $4,2$. Периметр треугольника равен 22 . Найдите стороны треугольника.

18А. Дан треугольник ABC такой, что $AB = 15$, $BC = 12$ и $AC = 18$. В каком отношении центр вписанной в треугольник окружности делит биссектрису угла C ?

19А. Вычислите длину биссектрисы угла A треугольника ABC с длинами сторон $BC = 18$, $AC = 15$, $AB = 12$.

20А. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20 . Найдите длину биссектрисы, проведенную к боковой стороне.

21А. Катеты прямоугольного треугольника равны 21 и 28 . Найдите длину биссектрисы прямого угла.

22А. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4 . Найдите радиус описанной окружности.

23А. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении $1 : 2$. Найдите стороны треугольника.

24А. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.

25А. В треугольнике ABC к стороне AC проведены высота BK и медиана BM , причём $AM = BM$. Найдите косинус угла KBM , если $AB = 1$, $BC = 2$.

26А. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N . Найдите отрезок CN , если катеты равны 1 и 4.

27А. BD – медиана прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$). Пусть K – точка касания стороны AD треугольника ABD с окружностью, вписанной в этот треугольник. Найти углы треугольника ABC , если K делит AD пополам.

28А. Гипотенуза прямоугольного треугольника в 4 раза больше проведенной к ней высоте. Найдите острые углы треугольника.

29А. В треугольнике ABC стороны AB и AC равны соответственно 8 и 7, $\angle BAC = 120^\circ$. Найти расстояние от основания высоты, опущенной на AC , до середины BC .

30А. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите эти стороны.

31А. В треугольнике ABC известно, что BD — медиана, $BD = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, а $\angle DBC = 90^\circ$. Найдите угол ABD .

32А. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 27 и 29, а медиана, проведённая к третьей, равна 26.

33А. Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведённую к большей стороне.

34А. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведённая к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

35А. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если медиана равна 3.

36А. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 2$ и $AC = 4$ и медиана $AM = \sqrt{7}$. Найдите угол BAC .

37А. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 12 и 20 соответственно. Найдите высоту, проведённую из вершины прямого угла.

38А. Найдите высоту прямоугольного треугольника, опущенную на гипотенузу, если известно, что основание этой высоты делит гипотенузу на отрезки, равные 1 и 4.

39А. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону, разбивает её на отрезки, равные 2 и 1, считая от вершины треугольника. Найдите эту высоту.

40А. Стороны треугольника равны 10, 17 и 21. Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины наибольшего угла.

41А. В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите биссектрису AM .

42А. Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.

43А. Площадь прямоугольного треугольника равна $2\sqrt{3}$. Найдите его высоту, проведённую к гипотенузе, если она делит прямой угол в отношении 1 : 2.

44А. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами m и n . Найдите стороны треугольника.

45А. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведены высота CD и медиана CE . Площади треугольников ABC и CDE равны соответственно 10 и 3. Найдите AB .

46А. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны 4 и 3 соответственно. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD .

47А. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30° . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.

48А. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

49А. Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50° . Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.

50А. Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.

51А. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей, равна 5. Найдите площадь треугольника.

52А. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 3, 4 и 5.

53А. Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $CP = 5$, $PE = 2$.

54А. Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если $CO = 9$, $OD = 5$.

55А. Расстояния от точки M , лежащей внутри треугольника ABC , до его сторон AC и BC соответственно равны 2 и 4. Найдите расстояние от точки M до прямой AB , если $AB = 10$, $BC = 17$, $AC = 21$.

56А. К окружности радиуса 7 проведены две касательные из одной точки, удалённой от центра на расстояние, равное 25. Найдите расстояние между точками касания.

57А. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке M , а сторону BC — в точке N . Известно, что $AC = 2$, $AB = 3$, $AM : MB = 2 : 3$. Найдите AN .

58А. В треугольнике ABC угол C равен 60° , а биссектриса CD равна $5\sqrt{3}$. Стороны AC и BC относятся как 5 : 2. Найдите тангенс угла A и сторону BC .

59А. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CD из вершины прямого угла C . Известно, что $AD = m$, $BD = n$. Найдите высоту, опущенную из вершины C .

60А. Прямая, параллельная основанию треугольника с площадью 108, отсекает от него треугольник с площадью 12. Найдите площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами малого треугольника, а четвертая лежит на основании большего треугольника.

61А. В треугольнике ABC стороны $AB = 14$, $AC = 18$, угол A вдвое больше угла B . Найдите третью сторону треугольника.

62А. (ЕГЭ 2003). В треугольнике ABC проведена медиана AM . Найдите площадь треугольника ABC , если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45^\circ$.

63А. (ЕГЭ 2003). В треугольнике BCE медиана BM равна 3, $CE = 4\sqrt{2}$, $BE = 5$. Найдите сторону BC .

64А. Прямоугольный треугольник, периметр которого равен 10, разбит высотой, опущенной на гипотенузу, на два треугольника. Периметр одного из них равен 6. Найдите периметр другого треугольника.

65А. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями 64 и 16. Найдите катеты.

66А. (ЕГЭ 2005). Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 10, а боковая сторона равна 5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BM и AN , пересекающиеся в точке K . Найдите площадь треугольника ABK .

67А. (ЕГЭ 2005). В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты BD и AN пересекаются в точке T , причем $AT = 10$, $TH = 8$. Найдите площадь треугольника ABT .

68А. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O так, что $BO = 5$, $OK = 3$. Найдите AH .

69А. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если известно, что биссектриса прямого угла разделила гипотенузу на отрезки 30 и 40.

70А. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12. Найдите расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

71А. (ЕГЭ 2005). В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена биссектриса BK . Найдите площадь треугольника CBK , если площадь треугольника ABC равна 18, а синус угла A равен 0,8.

72А. В треугольнике ABC известны $BC = 15$, $AC = 14$, $AB = 13$. Вычислите площадь треугольника, заключенного между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B .

ОТВЕТЫ

- 1А. 24; 32; 40. 2А. 17; 34; 24. 3А. 10; 10; 12. 4А. 7. 5А. 3. 6А. 5. 7А. $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 8А. $\sqrt{7}$. 9А. $(\sqrt{6}+2):1$; $(\sqrt{3}+1):2$. 10А. 13. 11А. 18. 12А. 10. 13А. 3. 14А. 5. 15А. 12. 16А. 75. 17А. 6; 7; 9. 18А. 2 : 1. 19А. 10. 20А. 6. 21А. $12\sqrt{2}$. 22А. 2. 23А. $2m, m, m\sqrt{3}$. 24А. 3; 4; 5. 25А. 0,8. 26А. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$. 27А. 30 ; 60. 28А. 15 ; 75. 29А. 6,5. 30А. $\frac{2m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; $\frac{2m \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. 31А. 30° . 32А. 270. 33А. 9,5. 34А. 30. 35А. $\sqrt{10}$. 36А. 60° . 37А. 9,6. 38А. 2. 39А. $\sqrt{5}$. 40А. 8. 41А. $\frac{24\sqrt{3}}{7}$. 42А. 4,8. 43А. $\sqrt{3}$. 44А. $\sqrt{2mn} - m, \sqrt{2mn} - n, n + m - \sqrt{2mn}$. 45А. $5\sqrt{2}$. 46А. $\frac{5\sqrt{13}}{12}$. 47А. $2\sqrt{\frac{22-12\sqrt{3}}{3}}$. 48А. 8; 2; 3. 49А. 5; 3. 50А. $9\sqrt{5}$. 51А. 48. 52А. 8. 53А. $\frac{245}{8}$. 54А. $\frac{1323}{20}$. 55А. $\frac{29}{5}$. 56А. 13,44. 57А. $\frac{24\sqrt{145}}{145}$. 58А. $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 7. 59А. $\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$. 60А. 36. 61А. 24. 62А. 21. 63А. 3. 64А. 8. 65А. $4\sqrt{5}$; $8\sqrt{5}$. 66А. 3,75. 67А. 120. 68А. $4\sqrt{5}$. 69А. 1176. 70А. 1. 71А. 8. 72А. 9.

Уровень В

1В. Биссектриса CD угла ACB при основании равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) делит сторону AB так, что $AD = BC = 2$.

- а) Докажите, что $CD = BC$.
- б) Найдите площадь треугольника ABC .

2В. Площадь треугольника ABC равна 12. На прямой AC взята точка D так, что точка C является серединой отрезка AD . Точка K — середина стороны AB , прямая KD пересекает сторону BC в точке L .

- а) Докажите, что $BL : LC = 2 : 1$.
- б) Найдите площадь треугольника BLK .

3В. Точка D делит сторону AC треугольника ABC в отношении $AD : DC = 1 : 2$.

а) Докажите, что в треугольнике ABD найдётся медиана, равная одной из медиан треугольника DBC .

- б) Найдите длину этой медианы в случае, если $AB = 7$, $BC = 8$ и $AC = 9$.

4В (ЕГЭ 2014). В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N . $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

- а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.
- б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP : PN$.

5В. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

6В. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Известно, что $AC = 3MB$.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1 , если известно, что $AC = 12$.

7В. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC с углом 30° при вершине A . Окружность, вписанная в треугольник BMC , касается его сторон BC и BM в точках P и Q .

- а) Докажите, что $PQ \perp CM$.
- б) Найдите PQ , если $AB = 8$.

8В. Точка E расположена вне квадрата $ABCD$ с центром O , причём треугольник BEC прямоугольный ($\angle E = 90^\circ$) и неравносторонний. Точка M — середина стороны BC .

а) Докажите, что треугольник OME равнобедренный.

б) Прямая EO пересекает сторону AD квадрата в точке K . Найдите отношение $AK : KD$, если $\angle CBE = 30^\circ$.

9В. Две стороны треугольника равны 1 и 5, площадь треугольника равна 2. Медиана, проведённая к его третьей стороне, меньше её половины.

а) Докажите, что треугольник тупоугольный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

10В. На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{3}{4}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

11В (ЕГЭ 2014). В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD . В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC , а вершина E — на отрезке AB .

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

12В (ЕГЭ 2014). Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC , если $AH = 8\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

13В (ЕГЭ 2016). В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение $EH : AC$, если $\angle ABC = 30^\circ$.

14В. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки M и N — середины отрезков AB и CH соответственно.

а) Докажите, что треугольники A_1MB_1 и A_1NB_1 равнобедренные.

б) Найдите площадь четырёхугольника A_1MB_1N , если $A_1B_1 = 6$ и $MN = 4$.

15В. Высота AH и медиана AM треугольника ABC делят угол BAC треугольника ABC на три равные части, причём точка H лежит между B и M . Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC .

- а) Докажите, что $MK = BH$.
- б) Найдите углы треугольника ABC .

16В. Медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны и пересекаются в точке P .

- а) Докажите, что $CP = AB$.
- б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AC = 3$ и $BC = 4$.

17В. В треугольнике ABC высота BD равна 6, медиана CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1.

- а) Докажите, что $CD : AD = 1 : 4$.
- б) Найдите площадь треугольника AEC .

18В. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = \sqrt{73}$ и медианой $AM = 4$.

- а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB .
- б) Найдите высоту треугольника ABC , проведённую из вершины A .

19В. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке K . Известно, что $CK = 5$, $KH = 1$.

- а) Докажите, что $AH : BH = 1 : 4$.
- б) Найдите площадь треугольника ABC .

20В. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны.

- а) Докажите, что $CE = 2AE$.
- б) Найдите стороны треугольника ABC , если $BE = AD = 8$.

21В (ЕГЭ 2016). В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, CH — высота.

- а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны.
- б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH , а Q — точка пересечения прямых BC и MH . Найдите площадь треугольника PQM , если $AH = 12$ и $BH = 3$.

22В (ЕГЭ 2016). На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$. Прямая, проходящая через точку A , параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .

- а) Докажите, что AM — биссектриса треугольника ABC .
- б) Найти S_{AMB} , если $AC = 30$, $BC = 18$ и $AB = 24$.

23В. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 130 и 312.

24В. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = \sqrt{21}$.

25В (ЕГЭ 2018). В треугольнике ABC угол ABC тупой, H — точка пересечения продолжений высот, угол AHC равен 60° .

а) Докажите, что угол ABC равен 120° .

б) Найдите BH , если $AB = 7$, $BC = 8$.

26В. Из вершин A и B тупоугольного треугольника ABC проведены высоты BQ и AH . Известно, что угол B — тупой, $BC : CH = 4 : 5$, $BH = BQ$.

а) Докажите, что диаметр описанной вокруг треугольника ABQ окружности в $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ раз больше BQ .

б) Найдите площадь четырехугольника $AHBQ$, если площадь треугольника HQC равна 25.

27В. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFG$. Точка M — середина стороны AB .

а) Докажите, что точка M равноудалена от центров квадратов.

б) Найдите площадь треугольника DMG , если $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$.

28В (ЕГЭ 2019). В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C , причём $CM = BC$ и $CN = AC$. Отрезки CP и CQ — биссектрисы треугольников ACB и NCM соответственно.

а) Докажите, что CP и CQ перпендикулярны.

б) Найдите PQ , если $BC = 3$, а $AC = 5$.

29В. Дана трапеция $ABCD$. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания BC в точке K .

- Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.
- Найдите биссектрису BM треугольника ABK , если $AD = 10$, $BC = 2$, $AB = CD = 5$.

30В. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M .

- Докажите, что треугольники AMB , AMC и BMC равновелики.
- Известно, что треугольник ABC прямоугольный, а точка M удалена от катетов на расстояния 3 и 4. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

31В. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

- Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.
- Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если $BE = 40$ и $CE = 24$.

32В. Окружность, построенная на биссектрисе BL равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, пересекает основание BC в точке P . Боковая сторона треугольника вдвое больше его основания.

- Докажите, что $BP = 5CP$.
- Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке M . Найдите BL , если $ML = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

33В. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 4$, $BC = 6$ и $AC = 8$.

- Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна стороне BC .
- Найдите длину биссектрисы треугольника ABC , проведённой из вершины A .

34В. Высоты, проведённые из вершин A , B и C треугольника ABC , равны 20, 15 и 12 соответственно.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённой из вершины C .

35В. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH . Из точки H на катеты опустили перпендикуляры NK и HE .

- Докажите, что точки A , B , K и E лежат на одной окружности.
- Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

36В. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD , равны 0,6 и 0,8.

- а) Докажите подобие треугольников ACD и BCD .
- б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

37В. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 4$, $AC = \sqrt{17}$ и $BC = 5$. На стороне AB взята точка D такая, что $AD = 1$.

- а) Докажите, что CD и AB перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BDC и ADC .

38В. В равнобедренном треугольнике ABC AC — основание. На продолжении стороны CB за точку B отмечена точка D так, что угол CAD равен углу ABD .

- а) Докажите, что AB биссектриса угла CAD .
- б) Найдите длину отрезка AD , если боковая сторона треугольника ABC равна 5, а его основание равно 6.

39В. В прямоугольном неравнобедренном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведены высота CH , медиана CM и биссектриса CL .

- а) Докажите, что CL является биссектрисой угла MCH .
- б) Найдите длину биссектрисы CL , если $CH = 3$, $CM = 5$.

40В. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

- а) Докажите, что треугольники AOC и C_1OA_1 подобны.
- б) Найдите площадь четырехугольника ACA_1C_1 , если известно, что угол ABC равен 30° , а площадь треугольника ABC равна 80.

41В. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 , точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые AA_1 и CC_1 .

- а) Докажите, что $MK \parallel AC$.
- б) Найдите площадь треугольника KBM , если $AC = 10$, $BC = 6$, $AB = 8$.

42В (ЕГЭ 2020). На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причем $AC_1 : C_1B = 7 : 12$, $BA_1 : A_1C = 3 : 1$, $AB_1 : B_1C = 3 : 4$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

- а) Докажите, что четырехугольник ADA_1B_1 — параллелограмм.
- б) Найдите CD , если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 21$, $BC = 16$.

43В. В треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 10$, $BC = 12$. На стороне AB отметили точки M_1 и M_2 так, что $AM_1 < AM_2$. Через точки M_1 и M_2 провели прямые, перпендикулярные стороне AB и отсекающие от треугольника ABC пятиугольник, в который можно вписать окружность.

- а) Докажите, что $AM_1 : BM_2 = 1 : 3$.
- б) Найдите площадь данного пятиугольника.

ОТВЕТЫ

1В. $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. **2В.** 4. **3В.** $2\sqrt{5}$. **4В.** 3 : 1. **5В.** 31,5. **6В.** 180. **7В.** 2. **8В.** $\sqrt{3}:3$.

9В. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **10В.** 21 : 4. **11В.** $24-12\sqrt{3}$. **12В.** 24. **13В.** 3 : 4. **14В.** 12. **15В.**

30, 60, 90. **16В.** $\sqrt{11}$. **17В.** 10. **18В.** 2,4. **19В.** 30. **20В.** $2\sqrt{13}$, $4\sqrt{13}$, $6\sqrt{5}$.

21В. 50. **22В.** 268,8. **23В.** 289. **24В.** 14. **25В.** $\frac{13\sqrt{3}}{3}$. **26В.** $\frac{40}{3}$. **27В.** 49. **28В.** $\frac{15}{4}$.

29В. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **30В.** 2,4. **31В.** 113. **32В.** $\sqrt{10}$. **33В.** $2\sqrt{6}$. **34В.** $\frac{60\sqrt{2}}{7}$. **35В.** 6,5. **36В.**

1. **37В.** 2. **38В.** $\frac{150}{11}$. **39В.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **40В.** 20. **41В.** 2,4. **42В.** 11. **43В.** $\frac{282}{7}$.