СЮЖЕТНЫЕ ЗАДАЧИ: КИНО, ТЕАТР

1) Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

а) да; б) 10; в) $\frac{9}{19}$.

2) Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

а) да; б) нет; в) 33.

3) В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 167 очков?

б) Может ли игрок шестью бросками набрать ровно 356 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 1001 очко?

а) да; б) нет; в) за 17 бросков.

4) В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

а) Например, 50 и 60; б) нет; в) 108 и 110.

5) Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{30}$?

б) Может ли эта разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

а) нет; б) да; в) $\frac{4}{7}$.

6) На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

а) Например, это двадцать чисел 17, число 11 и число 12.; б) нет; в) $S = 1650$.

7) Участники одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 73 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 80, средний балл участников, сдавших тест, составил 90, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 65. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, а не сдавших — 69. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

а) да; б) да; в) 15.

8) На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

а) например, 32 раза число 92 и число 26; б) нет; в) 693.

9) В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40000 рублей, а остальные поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

а) да; б) нет; в) 26.

10) За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?

а) да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$.

11) Несколько экспертов оценивают несколько кинофильмов. Каждый из них выставляет оценку каждому кинофильму — целое число баллов от 1 до 10 включительно. Известно, что каждому кинофильму все эксперты выставили различные оценки. Рейтинг кинофильма — это среднее геометрическое оценок всех экспертов. Среднее геометрическое чисел $a_1,....,a_n$ равно $\sqrt[n]{a_1,....,a_n}$. Оказалось, что рейтинги всех кинофильмов — различные целые числа.

а) Могло ли быть 2 эксперта и 5 кинофильмов?

б) Могло ли быть 3 эксперта и 4 кинофильма?

в) При каком наибольшем количестве экспертов описанная ситуация возможна для одного кинофильма?

а) нет; б) да; в) 4.

12) После того, как учитель доказал классу новую теорему, выяснилось, что большая часть класса не поняла доказательство. На перемене один ученик вдруг понял доказательство (и только он). Также известно, что в классе учится не более 30, но не менее 20 человек.

а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не понимает доказательство?

б) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены — нецелым числом?

в) Какое наибольшее целое значение может принять процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?

а) да; б) да; в) 96.

13) На сайте проводится опрос, кого из 134 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 17 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 41. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 27?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

а) 39; б) да; в) 167.

14) В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

а) да; б) 17; в) 41.

15) В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?

б) Путь есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?

в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

а) да; б) нет; в) 25.

16) Вася перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка $[23;84]$. Петя увеличил каждое из Васиных чисел на 1 и перемножил все полученные числа.

а) Может ли Петин результат быть ровно вдвое больше Васиного?

б) Может ли Петин результат быть ровно в 6 раз больше Васиного?

в) В какое наибольшее целое число раз Петин результат может быть больше Васиного?

а) да; б) нет; в) 3.

17) На каждой из 28 костей домино написаны два целых числа, не меньших 0 и не больших 6 так, что они образуют все возможные пары по одному разу (0-0, 0-1, 0-2 и так далее до 6-6).

Все кости домино разложили на несколько кучек и для каждой кучки подсчитали сумму всех чисел на костях, находящихся в этой кучке. Оказалось, что полученные суммы образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

а) Могло ли быть 7 кучек?

б) Могло ли быть 9 кучек?

в) Какое наибольшее количество кучек могло быть?

а) да; б) нет; в) 16.

18) В шахматы можно выиграть, проиграть или сыграть вничью. Шахматист записывает результат каждой сыгранной им партии и после каждой партии подсчитывает три показателя: «победы» — процент побед, округлённый до целого, «ничьи» — процент ничьих, округлённый до целого, и «поражения», равные разности 100 и суммы показателей «побед» и «ничьих». (Например, число 13,2 округляется до 13, число 14,5 округляется до 15, число 16,8 округляется до 17).

а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?

б) Может ли после выигранной партии увеличится показатель «поражений»?

в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?

а) да; б) да; в) 51.

19) Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S.

а) Приведите пример, когда $S < 15$.

б) Могло ли оказаться, что только два студента написали обе контрольные работы, если $S = 13$?

в) Какое наименьшее количество студентов могло написать обе контрольные работы, если $S = 13$?

а) Например, если 20 студентов написали обе контрольные работы и получили по 18 баллов, а по 4 студента написали только одну из двух контрольных работ и получили по 0 баллов;

б) нет; в) 12.

20) Маша и Наташа делают фотографии. Каждый день каждая девочка делает на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. В конце Наташа сделала на 1001 фотографию больше, чем Маша.

а) Могло ли это произойти за 7 дней?

б) Могло ли это произойти за 8 дней?

в) Какое максимальное количество фотографий могла сделать Наташа, если Маша в последний день сделала меньше 40 фотографий?

а) Да; б) нет; в) 1430.

21) На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 165. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

а) да, например, 7 раз число 19 и один раз число 32; б) нет; в) 759.

22) На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 3?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 9?

в) Пусть B — шестое по величине число, а S — среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S-B$.

а) нет; б) нет; в) $\frac{24}{11}$.

23) У Вовы есть набор из n грузиков попарно различных натуральных масс в граммах и чашечные весы, которые находятся в равновесии, если на каждой из двух их чаш лежат грузики с одинаковыми суммарными массами. Известно, что, какие бы два из них ни положили на одну чашу весов, всегда можно положить на другую чашу один или несколько из оставшихся грузиков так, что весы уравновесятся.

а) Может ли у Вовы быть ровно 6 грузиков, среди которых есть грузик массой 5 г?

б) Может ли у Вовы быть ровно 5 грузиков?

в) Известно, что среди грузиков Вовы есть грузик массой 1 г. Какую наименьшую массу может иметь самый тяжёлый грузик Вовы?

а) Да, например, 3 г, 4 г, 5 г, 6 г, 7 г и 8 г; б) нет; в) 7.