1

Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-3} = 4$. $\mid ^3$

0102A1

$x - 3 = 64$

$x = 67$

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2021
Основная волна 2018
Основная волна 2017
Досрочная волна 2014

Ответ: 67

2

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орлов выпало больше, чем решек.

3A2750

Источники:

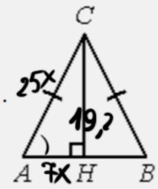
FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2013

О О О	Р Р Р
О О Р	Р Р О
О Р О	Р О Р
О Р Р	Р О О

$P = \frac{4}{8} = 0{,}5$

Ответ: 0,5

3

В треугольнике ABC $AC = BC$, высота CH равна 19,2, $\cos A = \frac{7}{25}$. 

Найдите AC.

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2013

① $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sin^2 A + \frac{49}{625} = 1$

$\sin^2 A = \frac{625}{1} - \frac{49}{625}$

$\sin^2 A = \frac{576}{625}$

$\sin A = \frac{24}{25}$

② $\sin A = \frac{19,2}{AC} = \frac{24}{25}$

$AC = \frac{19,2 \cdot 25}{24}$

$(25x)^2 = (7x)^2 + (19,2)^2$

$x =$

Ответ: 20

4

Найдите значение выражения $\frac{51 \cos 4^\circ}{\sin 86^\circ} + 8$.

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2013

$\frac{51 \cdot \cos 4^\circ}{\sin(90^\circ - 4^\circ)} + 8$

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{51 \cancel{\cos 4^\circ}}{1 \cancel{\cos 4^\circ}} + 8 = 59$

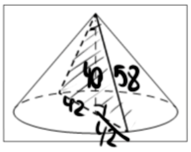
Ответ: 59

5

Введите ответ в поле ввода

Высота конуса равна 40, а длина образующей — 58. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

Введите ответ



i **Номер: 4440** Статус задания: **НЕ РЕШЕНО** ОТВЕТИТЬ

Источники:

FIPI (новый банк)

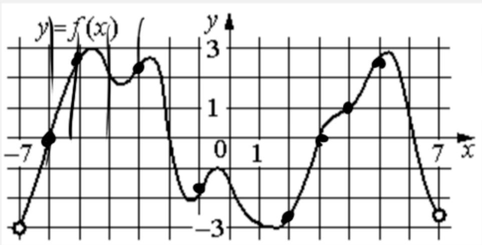
① $R = \sqrt{58^2 - 40^2} = 42$

② $S_{тр} = \frac{1}{2} \cdot 84 \cdot 40 = 1680$

Ответ: 1680

6

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



2E361B

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

Ответ: 8

7

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 3$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{588}$ м/мин ^{2} и $b = -\frac{1}{7}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

2510D0

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018

$0 = \frac{1}{588}t^2 - \frac{1}{7}t + 3 \quad | \cdot 588$

$t^2 - 84t + 1764 = 0$

$(t-42)^2 = 0$

$t = 42$

Ответ: 42

8

Первый сплав содержит 5% меди, второй — 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 9 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

72E65F

Источники:

FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2013

СХЕМА ЗАДАЧ НА СПЛАВЫ И СМЕСИ

$\text{Доля}_1 \cdot m_1 + \text{Доля}_2 \cdot m_2 = \text{Доля}_3 \cdot m_3$

$0{,}05 \cdot m_1 + 0{,}13 \cdot (m_1 + 9) = 0{,}11 \cdot (m_1 + m_1 + 9)$

$0{,}05 \cdot m_1 + 0{,}13 m_1 + 1{,}17 = 0{,}22 m_1 + 0{,}99$

$0{,}18 = 0{,}04 m_1$

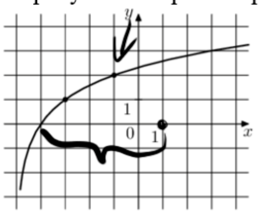
$m_1 = 4{,}5$

$2m_1 + 9 = 2 \cdot 4{,}5 + 9 = 18$

Ответ: 18

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите $f(11)$.

Источники: Mathege



① $b = +5$

$y = \log_a(x+5)$

② $(-1; 2)$

$2 = \log_a 4$

$a^2 = 4$

$a = 2$

$y = \log_2(x+5)$

③ $f(11) = \log_2(11+5) = 4$

Ответ: 4

10 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 90% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 60% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Источники: Только MATHEGE

P(яйцо получило высш. кат.) = 0,6

P(взяли яйцо из I хоз-ва, и при этом оно в.к.) = $x \cdot 0{,}4$

P(взяли яйцо из II хоз-ва, и при этом оно в.к.) $= (1-x) \cdot 0{,}9$

$0{,}4x + 0{,}9 \cdot (1-x) = 0{,}6$

$0{,}4x + 0{,}9 - 0{,}9x = 0{,}6$

$0{,}3 = 0{,}5x$

$x = 0{,}6$

Ответ: 0,6

11

Найдите наибольшее значение функции

$y = 6 + 12x - 4x\sqrt{x}$

на отрезке $[2\,;\,11]$.

D8A61C

① $y = 6 + 12x - 4 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$y = 6 + 12x - 4x^{\frac{3}{2}}$

② $y' = 12 - \cancel{4}^{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} x^{\frac{1}{2}} = 0$

$12 - 6\sqrt{x} = 0$

$\sqrt{x} = 2$

$x = 4$

③ $y(2) = \ldots$

$y(4) = 6 + 48 - 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{4} = 22$

$y(11) = \ldots$

Ответ: 22

Источники:

FIPI (старый банк)

FIPI (новый банк)

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$

$x' = 1$

$(Cx)' = C$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

12

а) Решите уравнение

$$2^{4\cos x} + 3 \cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Источники:

Основная волна 2016

а) Пусть $2^{2\cos x} = t$

$t^2 + 3t - 10 = 0$

$t = -5$

$2^{2\cos x} = -5$

$\varnothing$

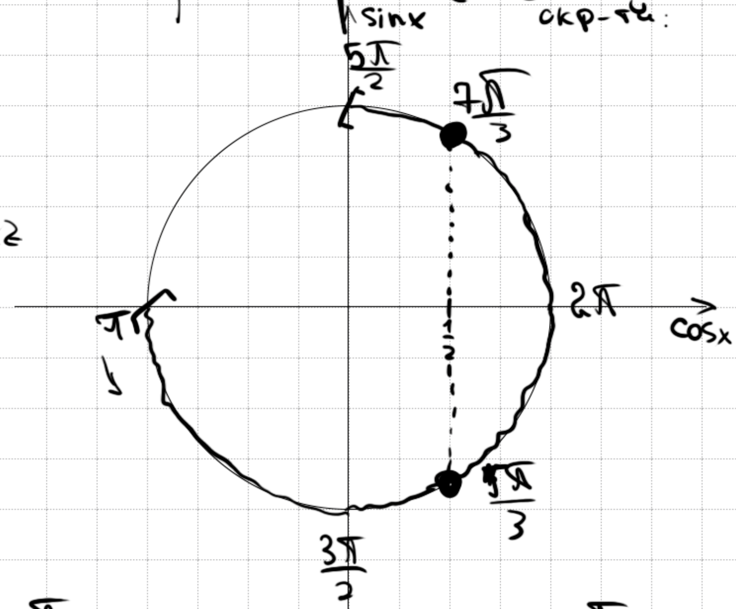
$t = 2$

$2^{2\cos x} = 2^1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окр-ти:



Получим числа $x = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$

$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

б) $\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$

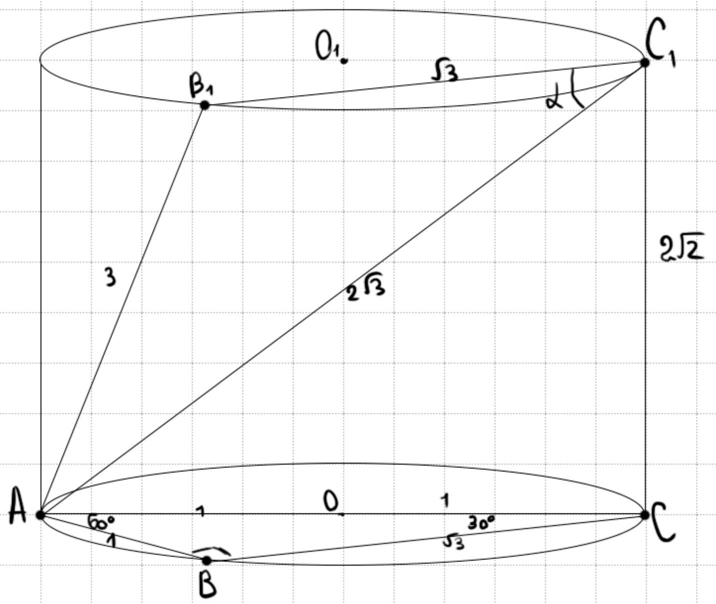
13

Задание с развернутым ответом

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = 1$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$.
а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60°.
б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

i Номер: 5176

Источники:
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)



а) $(\widehat{AC_1; BC}) = (\widehat{AC_1; B_1C_1}) = \angle AC_1B_1 = \alpha$

$B_1C_1 = BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$AC_1 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$

$AB_1 = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$ по т. cos

$\cos\alpha = \dfrac{3 + 12 - 9}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = \dfrac{6}{4\cdot 3} = \dfrac{1}{2}$

$\alpha = 60^\circ$

б) $S_{бок} = 2\pi R \cdot h$

$S_{бок} = 2\pi \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$

Ответ: $4\sqrt{2}\pi$

14

Решите неравенство
$(3^{4x-x^2-3} - 1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 5) \geq 0.$

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2016

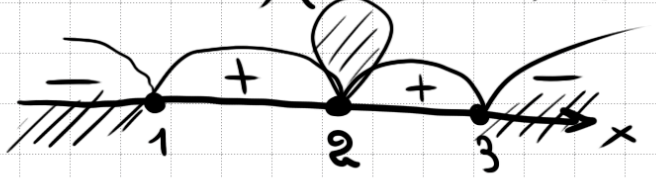
МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

$(3^{4x-x^2-3} - 3^0)\cdot(\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+5) - \log_{\frac{1}{2}}1) \geq 0$

$\begin{cases} (3-1)(4x-x^2-3)\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(x^2-4x+5-1) \geq 0 \quad \vert :(-\frac{1}{2}) & ① \\ x^2 - 4x + 5 > 0 & ② \end{cases}$

① $(4x - x^2 - 3)(x^2 - 4x + 4) \leq 0$



② $x^2 - 4x + 4 + 1 > 0$
$(x-2)^2 + 1 > 0$
x - любое

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$

15 Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

Источники: Досрочная волна (Резерв) 2019

1 год:

При $p=10$

Прибыль: $-0{,}5x^2+10x-2x-6$

$-0{,}5x^2+8x-6$

$x_0=\frac{-8}{2\cdot(-0{,}5)}=8$

$y_{наиб}=-0{,}5\cdot64+64-6=26$ млн

максимально возможная прибыль за 1 год

2 год:

При $p=11$

Прибыль: $-0{,}5x^2+11x-2x-6$

$-0{,}5x^2+9x-6$

$x_0=9$

$y_{наиб}=-0{,}5\cdot81+81-6=34{,}5$ млн

max возм. прибыль за 2 год

3 год:

При $p=12$

Прибыль $=-0{,}5x^2+10x-6$

$x_0=10$

$y_{наиб}=-0{,}5\cdot100+100-6=44$ млн – max возм прибыль за 3 год

4 год:

При $p=13$

Прибыль $=-0{,}5x^2+11x-6$

$x_0=11$

$y_{наиб}=54{,}5$ – max возм прибыль за 4 года

$26+34{,}5+44+54{,}5=159$ млн

=> окупится за 4 года

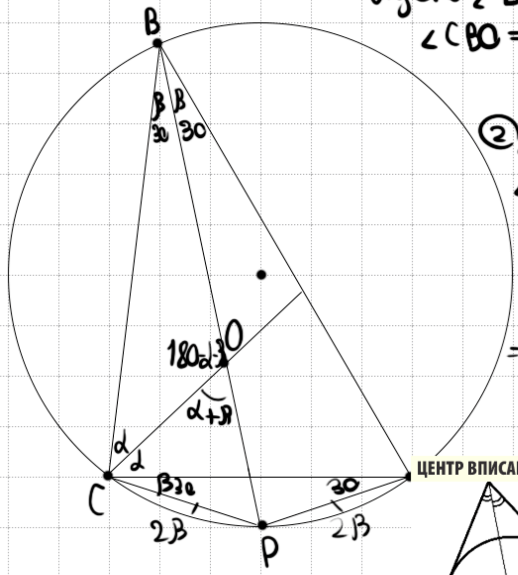
Ответ: 4 года

16

Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.
б) Найдите площадь треугольника APC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 8, а $\angle ABC = 60°$.

Источники:
Основная волна 2019
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)



а) ① BO и CO - биссектрисы
Пусть $\angle BCO = \alpha = \angle ACO$
$\angle CBO = \beta = \angle ABC$

② $\angle COB = 180 - \alpha - \beta$
$\angle COP = 180 - (180 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$
$\angle ACP = \beta = \angle ABP$
(опираются на одну дугу)

$\Rightarrow \angle COP = \alpha + \beta = \angle PCO$ ■


ЦЕНТР ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

Центр вписанной в треугольник окружности – это точка пересечения биссектрис

б) ① $AP = PC$ (т.к. равные дуги стягивают равные хорды)

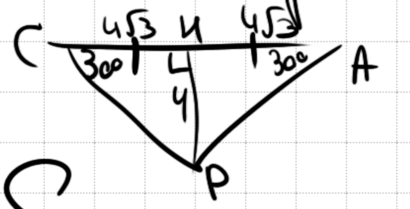
② $\angle ABC = 60° = 2\beta$
$\beta = 30°$

③ по т. sin

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$$

$$AC = \cancel{2} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

④ Рассмотрим $\triangle APC$:



$$tg\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{PH}{4\sqrt{3}}$$

$PH = 4$

$$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$$

Ответ: $16\sqrt{3}$

17

Задание с развернутым ответом

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 12a - 28, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

i **Номер: 5142**

Источники:

FIPI (новый банк)

Основная волна 2018

$(x_1; y_1)$ $(x_1; y_2)$

$(x_2; y_1)$ $(x_2; y_2)$

Если $a < 0$, то решений система нет

Если $a = 0$, то $\begin{cases} x^4 - y^4 = 12 \cdot 0 - 28 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0^4 - 0^4 = -28 \\ 0^2 + 0^2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ решений система нет $\Rightarrow a \neq 0$

$\Rightarrow a > 0$

$\begin{cases} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 12a - 28 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$

$\begin{cases} a \cdot (x^2 - y^2) = 12a - 28 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ $\Big| : a$

$+\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 - \frac{28}{a} \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$

Ответ: $(2; 6 - 2\sqrt{2}) \cup (6 + 2\sqrt{2}; +\infty)$

$2x^2 = a + 12 - \frac{28}{a}$

$x^2 = \frac{a}{2} + 6 - \frac{14}{a}$

$x = \pm\sqrt{\frac{a}{2} + 6 - \frac{14}{a}}$

$y^2 = a - x^2$

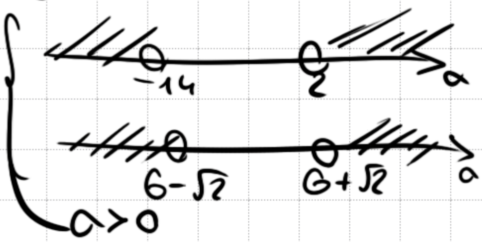
$y^2 = a - \frac{a}{2} - 6 + \frac{14}{a} = \frac{a}{2} - 6 + \frac{14}{a}$

$y = \pm\sqrt{\frac{a}{2} - 6 + \frac{14}{a}}$

Чтобы было 4 решения системы

$\begin{cases} \frac{a}{2} + 6 - \frac{14}{a} > 0 & \Big| \cdot 2a \\ \frac{a}{2} - 6 + \frac{14}{a} > 0 & \Big| \cdot 2a \\ a > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 + 12a - 28 > 0 \\ a^2 - 12a + 28 > 0 \\ a > 0 \end{cases}$



18

Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.
Три числа назовём *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 12 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Основная волна 2015

а) Да, например 1 2 3 5 8 13 21 34, т.к. не найдётся трёх чисел, для которых выпол-ся нер-во тр-ка

б) Пусть $a<b<c<d$

Тогда гипотенузой может быть c или d

① $c^2=a^2+b^2$ ✓
② $d^2=a^2+b^2$
③ $d^2=a^2+c^2$ ✓
④ $d^2=b^2+c^2$

из ур-ний ① и ② следует, что $c=d$
из ур-ний ③ и ④ следует, что $a=b$

Поэтому из четырёх потенциально отличных троек одновременно с вып. только 2

⇒ Ответ б) нет

в) $a<b<c<d<e<f<g<h<i<k<l<m$

m может быть гипотенузой max в 5 тр-ках
l 5 тр-ках
k 4
i 4
h 3
g 3
f 2
e 2
d 1
c 1

30

⇒ 30 — наибольшее возможное кол-во отличных троек для 12 разл. чисел!

Ответ:

	а) Да
Ответ:	б) нет
	в) 30

Пример.

$\sqrt{1}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{10}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{12}$