

1

Найдите корень уравнения

$$(x + 12)^2 = 48x.$$

$$x^2 + 24x + 144 - 48x = 0$$

$$x^2 - 24x + 144 = 0$$

$$(x - 12)^2 = 0$$

$$x = 12$$

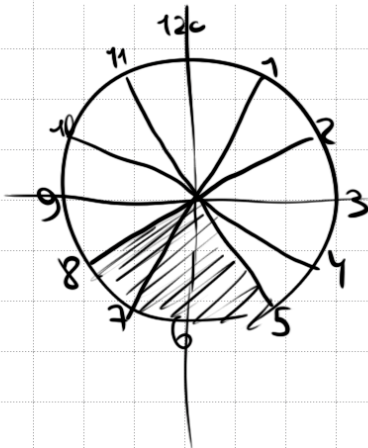
Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

ОТВЕТ: 1 2**2**

Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 5, но не дойдя до отметки 8.



$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)

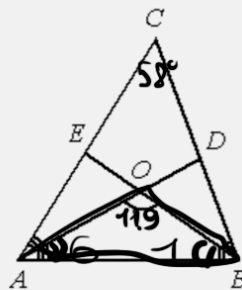
Досрочная волна 2021

Пробный ЕГЭ 2013

ОТВЕТ: 0 , 2 5

3

В треугольнике ABC угол C равен 58° , биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



540F92

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)

ОТВЕТ: 1 | 1 | 9

4

Найдите значение выражения $\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin^2\frac{15\pi}{8}$.

0DC0A0

$$\sqrt{2} \cdot \left(1 - 2\sin^2\frac{15\pi}{8}\right)$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos^2\frac{15\pi}{8}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

ОТВЕТ: 1

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Досрочная волна 2019
Основная волна 2017
Пробный ЕГЭ 2016
Основная волна 2014

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

5

В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 48 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в см.



радиус в 2 раза больше

UBE824

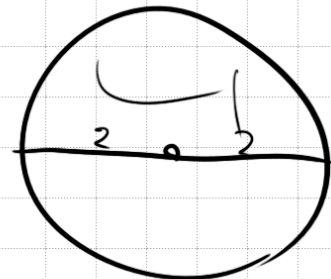
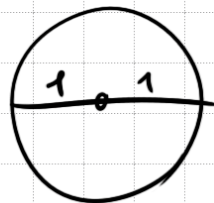
$$\textcircled{1} V_{\text{вода}} = \pi R^2 \cdot 48$$

$$\textcircled{2} V_{\text{вода}} = \pi \cdot (2R)^2 \cdot h$$

$$\textcircled{3} \cancel{\pi R^2} \cdot 48 = \cancel{\pi} \cdot 4 \cancel{R^2} \cdot h$$

$$48 = 4 \cdot h$$

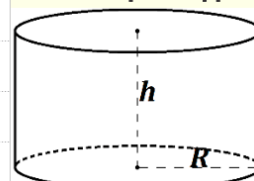
$$h = 12$$



Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Демо 2021
 Демо 2020
 Демо 2019
 Демо 2018
 Демо 2017
 Основная волна 2017
 Демо 2016
 Демо 2015

ОБЪЁМ ЦИЛИНДРА



$$V = \pi R^2 h$$

ОТВЕТ: 1 2

6

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой).



Пользуясь рисунком, вычислите $F(-1) - F(-8)$, где $F(x)$ — одна из

первообразных функции $f(x)$.



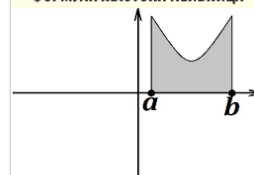
FE5822

$$\frac{3 + 7}{2} \cdot 4 = 20$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 Пробный ЕГЭ 2014
 Пробный ЕГЭ 2013
 Досрочная волна 2013

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА



$$S_{\text{фигуры под графиком}} = F(b) - F(a)$$

ОТВЕТ: 20

7

Груз массой 0,38 кг колеблется на пружине. Его скорость v (в м/с) меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний в секундах, $T = 8$ с — период колебаний, $v_0 = 2$ м/с. Кинетическая энергия E (в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), — скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 7 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.



48BA77

$$v = 2 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 7}{8} = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$E = \frac{0,38 \cdot (-\sqrt{2})^2}{2} = 0,38$$

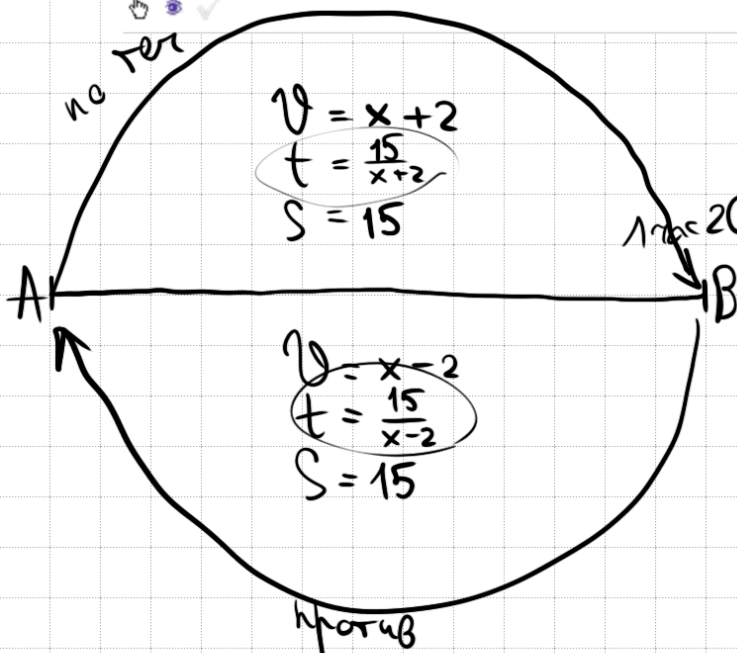
ОТВЕТ: 0,38

8

Байдарка в 10 : 00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 16 : 00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.



5FA179



$$t_{\rightarrow} + t_{\text{стоянки}} + t_{\leftarrow} = 6$$

$$\frac{15}{x+2} + 1 \frac{1}{3} + \frac{15}{x-2} = 6$$

ОТВЕТ: 7

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2019
Основная волна 2013

$$\frac{15x - 30 + 15x + 30}{x^2 - 4} = \frac{30x}{x^2 - 4} = \frac{147}{3} \quad | :2$$

$$\frac{30x}{x^2 - 4} = \frac{147}{3} \quad | :2$$

$$7x^2 - 28 = 45x$$

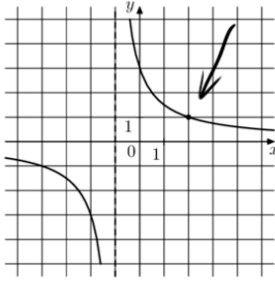
$$7x^2 - 45x - 28 = 0$$

$$D = 2025 + 784 = 2809 = 53^2$$

$$x = \frac{45 + 53}{14} = 7$$

9

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите $f(19)$.



$$\textcircled{1} \quad y = \frac{k}{x+1}$$

$$\textcircled{2} \quad (2; 1)$$

$$1 = \frac{k}{2+1} \quad k=3$$

$$y = \frac{3}{x+1}$$

$$\textcircled{3} \quad f(19) = \frac{3}{19+1} = \frac{3}{20} = 0,15$$

ОТВЕТ: 0,15

Источники:

Mathege

10

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем – 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,97?

$$P(\text{уничтожена}) \geq 0,97$$

$$P(\text{уцелеть}) \leq 0,03$$

$$P(\text{уцелеть при первом выстреле}) = 0,7$$

$$P(\text{уцелеть при последующих выстрелах}) = 0,4$$

- 1 выстрел
- 2 выстрела
- 3 выстрела
- 4 выстрела
- 5 выстрелов

$$P(\text{уцелеть}) = 0,7$$

$$P(\text{уцелеть}) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$$

$$= 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,112$$

$$= 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,0448$$

$$= 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,01792$$



ОТВЕТ: 5

Источники:

Только MATHEGE

11 Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{x}{x^2 + 225}$$

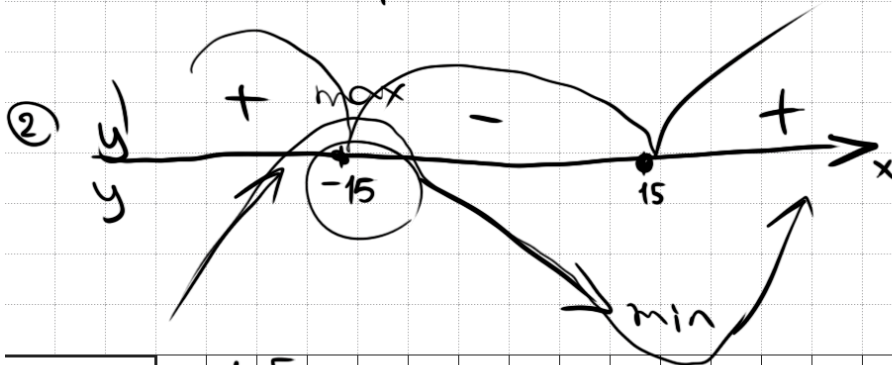
$$y = \frac{-x}{x^2 + 225}$$

$$① y' = \frac{-1 \cdot (x^2 + 225) - (-x) \cdot (2x)}{(x^2 + 225)^2} = 0$$

$$-x^2 - 225 + 2x^2 = 0$$

$$x^2 - 225 = 0$$

$$x = 15 \quad x = -15$$



ОТВЕТ: -15

12 а) Решите уравнение

$$10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

а)

$$10^{\sin x} - 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x} = 0$$

$$2^{\sin x} \cdot (5^{\sin x} - 5^{-\cos x}) = 0$$

$$2^{\sin x} = 0$$



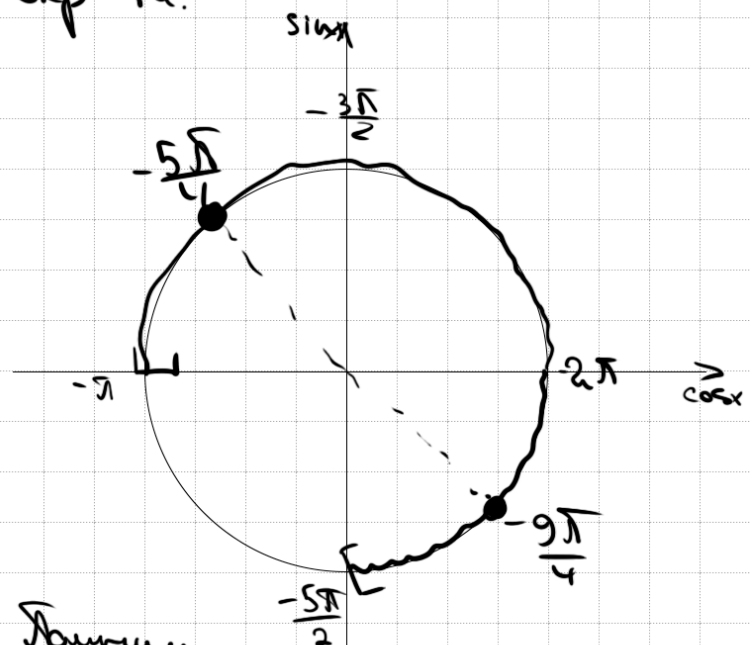
$$5^{\sin x} = 5^{-\cos x}$$

$$\sin x = -\cos x$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим

много:

$$x = -\frac{5\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4} - 2\pi$$

$$x = -\frac{9\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - 2\pi$$

ОТВЕТ:

а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Демо 2021
 Демо 2020

ПРОИЗВОДНЫЕ

$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(Cx)' = C$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(U \cdot V)' = U'V + UV'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$$

Источники:

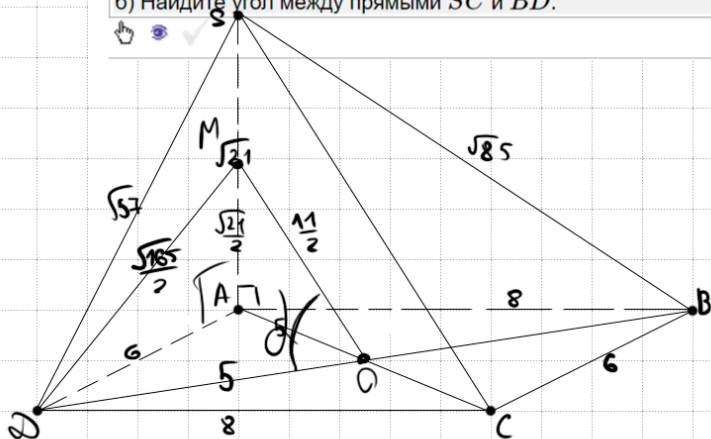
ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Яценко 2018
 Семёнов 2015
 Основная волна 2013

13

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD .



а) ① Заметим, что в $\triangle SAD$ вып. т. Пифаг.

$$\sqrt{57}^2 = \sqrt{21}^2 + 6^2$$

$\Rightarrow \angle SAD = 90^\circ$ по т. обр. т. Пиф.

Заметим, что в $\triangle SAB$ вып. т. Пиф.

$$\sqrt{85}^2 = \sqrt{21}^2 + 8^2$$

$\Rightarrow \angle SAB = 90^\circ$ по т. обр. т. Пиф.

$SA \perp AB \Rightarrow SA$ — высота пирамиды, т.к. $SA \perp AD$ $SA \perp (ABC)$ по признаку перп. прямой к пл. — т.т.

ОТВЕТ: $\arccos\left(\frac{14}{55}\right)$

Пусть OM — отрезок в $\triangle SAC$

$$\angle (SC, BD) = \angle (OM, BD)$$

т.к. $SC \parallel OM$

$\Rightarrow \angle MOD$ — искомым

$$BD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$DM = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{165}}{2}$$

$$OM = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 5^2} = \frac{11}{2}$$

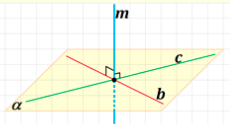
$$\cos \alpha = \frac{\frac{121}{4} + \frac{25}{1} - \frac{165}{4}}{2 \cdot \frac{11}{2} \cdot 5} = \frac{14}{55}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{14}{55}\right)$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Ященко 2021 (36 вар)
 Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2019 (36 вар)
 Ященко 2018 (10 вар)
 Ященко 2018 (30 вар)

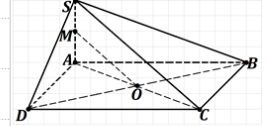
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

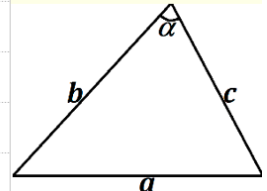
УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Найдите угол между SC и BD



Сделаем параллельный перенос SC на OM и найдём угол между OM и BD

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

14

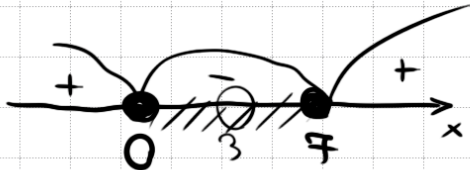
Решите неравенство

$$2 \log_{(x^2-6x+10)^2} (5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+7x+3)$$

$$\log_{(x-3)^2+1} (5x^2+3) \leq \log_{(x-3)^2+1} (4x^2+7x+3)$$

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ 5x^2+3 \leq 4x^2+7x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ x^2-7x \leq 0 \end{cases}$$



ОТВЕТ: $[0; 3) \cup (3; 7]$

Источники:

Ященко 2019 (36 вар)
 Основная волна 2016

15

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 10 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором банк через четыре года начислит на вклад меньше 15 млн рублей.

Источники:

Основная волна (резерв) 2020
Ященко 2018
Досрочная волна 2016

Пусть S - сумма вклада
в 2021-году
Пусть декабрь - месяц начисления
вклада

Дата	Сумма вклада
январь 21	S
декабрь 21	$1,1S$
январь 22	ничего не происходит
декабрь 22	$1,1^2 \cdot S$
январь 23	$1,21 \cdot S + 10$
декабрь 23	$1,1^3 \cdot S + 11$
январь 24	$1,1^3 \cdot S + 21$
декабрь 24	$1,1^4 \cdot S + 23,1$

$$1,1^4 S + 23,1 - S - 2 \cdot 10 < 15$$

$$0,4641 \cdot S < 11,9$$

$$S < \frac{119 \cdot 10000}{4641}$$

$$S < \frac{1190000}{4641}$$

$$\begin{array}{r} 1190000 \\ 4641 \overline{) 26180} \\ \underline{23205} \\ 2975 \end{array}$$

$$S < \frac{2975}{4641}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = 25$$

ОТВЕТ: 25 млн

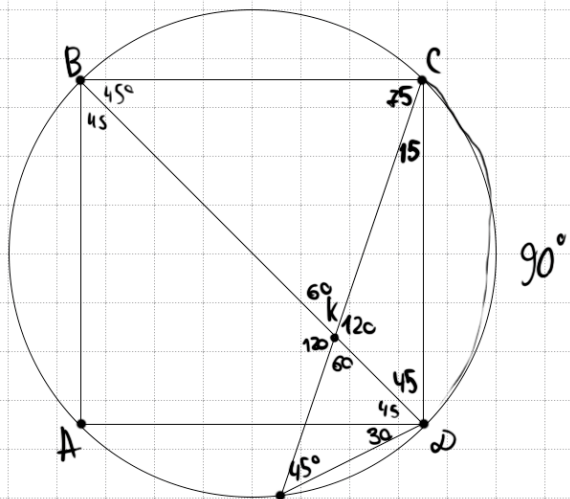
16

Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает диагональ BD в точке K .

- а) Докажите, что произведение $CK \cdot CE$ равно площади квадрата.
- б) Найдите отношение $CK : KE$, если $\angle ECD = 15^\circ$.

Источники:

Ященко 2018
Основная волна 2016



- 1) $\angle CDK = 45^\circ$ (по с.в. в квадр.)
 $\angle CBD = 45^\circ$
 $\angle CED = 45^\circ$ т.к. опираются на одну дугу

2) $\triangle CKD \sim \triangle CED$ по 2 углам ($\angle C$ общий, $\angle CDK = \angle CED = 45^\circ$)

$$KE = CE - CK = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot CD - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot CD = \frac{CD}{\sqrt{6}}$$

ОТВЕТ: 2:1

$$\frac{CK}{ED} = \frac{CK}{CD} = \frac{CD}{CE}$$

$$CK \cdot CE = CD^2 = S_{ABCD}$$

2) Выразим CK и CE через CD

$\triangle CDK$: по т. Син

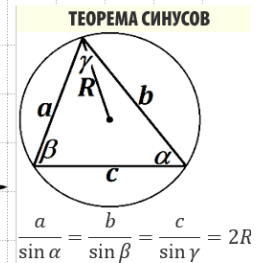
$$\frac{CK}{\sin 45^\circ} = \frac{CD}{\sin 120^\circ}$$

$$CK = CD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\triangle CDE$: по т. Син

$$\frac{CD}{\sin 45^\circ} = \frac{CE}{\sin 120^\circ}$$

$$CE = CD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$$



$$\frac{CK}{KE} = \frac{CD \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{CD}{\sqrt{6}}} = 2:1$$

$$|1 - 6\sqrt{x}| = 3(x + a)$$

имеет ровно два корня.

$$x \geq 0$$

$$\frac{|1 - 6\sqrt{x}|}{3} = x + a$$

$$\frac{|1 - 6\sqrt{x}|}{3} - x = a$$

Решим графически:

Пусть $f(x) = \frac{|1 - 6\sqrt{x}|}{3} - x$

Если $0 \leq x \leq \frac{1}{36}$, то $f(x) = \frac{1 - 6\sqrt{x}}{3} - x$

$$f(x) = \frac{1}{3} - \underbrace{2\sqrt{x}}_{\text{убывает}} - \underbrace{x}_{\text{убывает}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 - 6\sqrt{x}}{3} - x \text{ - убывает при } x \leq \frac{1}{36}$$

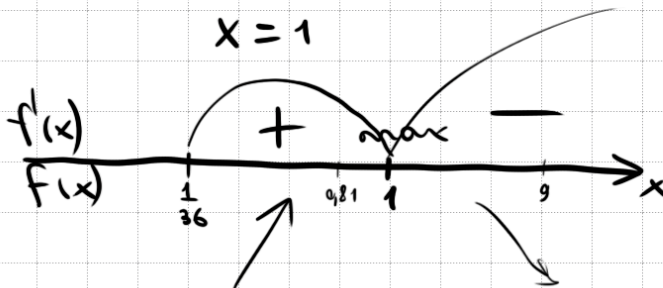
Если $x > \frac{1}{36}$, то $f(x) = \frac{6\sqrt{x} - 1}{3} - x = 2\sqrt{x} - x - \frac{1}{3}$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 0$$

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$x = 1$$



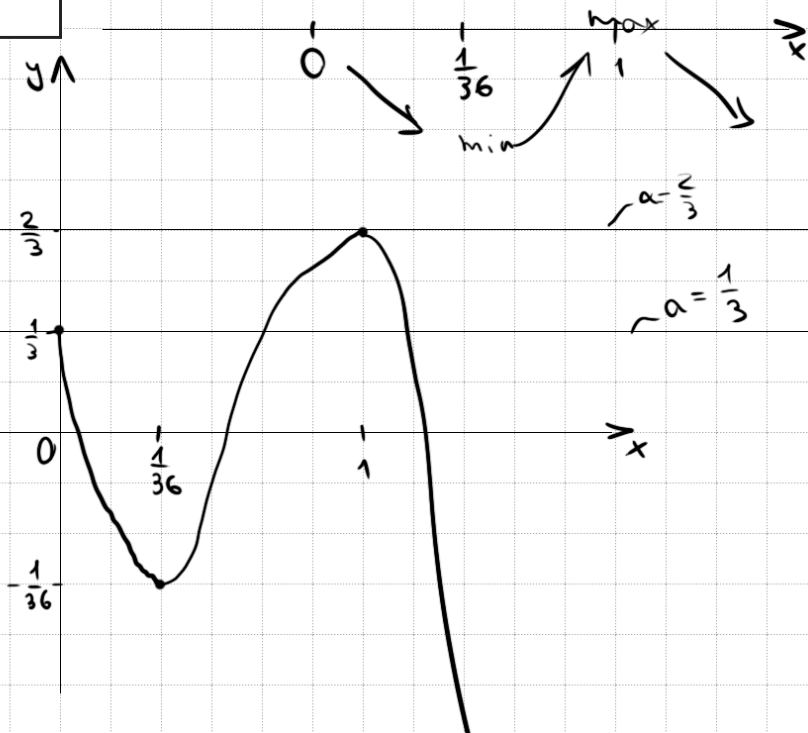
Получаем такие данные о функции.

ОТВЕТ:

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

x	0	$\frac{1}{36}$	1
f(x)	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{2}{3}$

Построим
эскиз f(x)



а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2019 (36 вар)
 Ященко 2018
 Задания для школы экспертов ЕГЭ

$$a) a \cdot b \cdot c \cdot d = 10 \cdot (a + b + c + d)$$

① Среди цифр нет нулей

② Среди цифр есть 5 и ^{тетрада цифр} (не 0)

Если $a = 5$ $b = 2$, то

$$10cd = 10 \cdot (5 + 2 + c + d)$$

$$cd = 7 + cd$$

$$c \cdot d - c = 7 + d$$

$$c(d-1) = 7+d$$

$$c = \frac{7+d}{d-1}$$

Если $d = 2$, то $c = 9$

$$5292$$

$$б) a \cdot b \cdot c \cdot d = 175 \cdot (a + b + c + d)$$

① Среди цифр есть 5, 5 и 7

Если $a = 5$ $b = 5$ $c = 7$

$$175d = 175(17 + d)$$

$$0 \cdot d = 17$$

Нет решения где d

⇒ Ответ: б) нет

$$в) a \cdot b \cdot c \cdot d = 50 \cdot (a + b + c + d)$$

Среди цифр есть:

① $a = 5$ $b = 5$ $c = 2$ ~~или~~

② $a = 5$ $b = 5$ $c = 4$ ~~или~~

③ $a = 5$ $b = 5$ $c = 6$ ~~или~~

④ $a = 5$ $b = 5$ $c = 8$

ОТВЕТ:

а) 5292

б) нет

в)

①

$$50d = 50 \cdot (12 + d)$$

$$0d = 12 \quad \emptyset$$

② ~~$100d = 50 \cdot (14 + d)$~~

$$d = 14 \quad \emptyset$$

③ ~~$150d = 50 \cdot (16 + d)$~~

$$2d = 16$$

$$d = 8$$

$$a = 5$$

$$b = 5$$

$$c = 6$$

$$d = 8$$

Ответ: в) ↓

$$5586$$

$$5568$$

$$5865$$

$$5856$$

$$5658$$

$$5685$$

④ ~~$200d = 50 \cdot (18 + d)$~~

$$3d = 18$$

$$d = 6$$

$$5586$$

$$6558$$

$$6585$$

$$6855$$

$$8556$$

$$8565$$

$$8655$$