

## РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 13 профильного ЕГЭ по теме «Расстояние от точки до прямой и плоскости». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

**Расстояние от точки до прямой.** *Расстояние от точки до прямой*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую. Расстояние от точки до прямой можно вычислить, как длину отрезка перпендикуляра, если удастся включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот. При этом если длины сторон треугольника все разные  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (треугольник не равносторонний и не равнобедренный), то высоту треугольника, например, к стороне  $a$  можно искать по следующему алгоритму: 1) по теореме косинусов находим косинус угла между сторонами  $a$  и  $b$ ; 2) зная косинус этого угла, используя основное тригонометрическое тождество, найти его синус; 3) синус найденного угла есть отношение искомой высоты к стороне  $b$ . **В прямоугольном треугольнике высота к гипотенузе равна произведению катетов, деленному на гипотенузу.**

**Расстояние от точки до плоскости.** *Расстояние от точки до плоскости*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. Расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\alpha$ : 1) равно расстоянию до плоскости  $\alpha$  от произвольной точки  $P$ , лежащей на прямой  $l$ , которая проходит через точку  $M$  и параллельна плоскости  $\alpha$ ; 2) равно расстоянию до плоскости  $\alpha$  от произвольной точки  $P$ , лежащей на плоскости  $\beta$ , которая проходит через точку  $M$  и параллельна плоскости  $\alpha$ . **Метод объемов:** Если объем пирамиды  $ABCS$  равен  $V_{ABCS}$ , то расстояние от точки  $S$  до плоскости  $ABC$  можно найти используя формулу объема пирамиды:  $V_{ABCS} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H$ , где  $H$  – расстояние от точки  $S$  до плоскости  $ABC$ .

**Расстояние между двумя параллельными прямыми** равно длине отрезка их общего перпендикуляра. Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

**Расстояние между двумя параллельными плоскостями** равно длине их общего перпендикуляра, которое равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью.

**Уровень А**

**1А.** Дан единичный куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите расстояния:

- а) от точки  $A$  до прямой  $CD_1$ ;
- б) от точки  $D$  до прямой  $CC_1$ ;
- в) от точки  $C_1$  до прямой  $AD_1$ ;
- г) от точки  $B$  до плоскости  $DA_1 C_1$ ;
- д) от точки  $A$  до плоскости  $BDC_1$ ;
- е) от точки  $D$  до плоскости  $AB_1 D_1$ .

**2А.** Рёбра правильного тетраэдра  $ABCD$  равны 1. Точка  $K$  — середина ребра  $AB$ . Найдите расстояния:

- а) от точки  $K$  до прямой  $CD$ ;
- б) от точки  $A$  до плоскости  $BCD$ ;
- в) от точки  $K$  до плоскости  $ADC$ ;
- г) от центра грани  $ABC$  до плоскости  $BCD$ .

**3А.** Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S$  равны 1. Точка  $K$  — середина бокового ребра  $SC$ . Найдите расстояния:

- а) от точки  $A$  до прямой  $SC$ ;
- б) от точки  $K$  до прямой  $AB$ ;
- в) от точки  $K$  до прямой  $BD$ ;
- г) от точки  $A$  до плоскости  $BSD$ ;
- д) от точки  $S$  до плоскости  $BKD$ .

**4А.** Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ , все рёбра которой равны 1. Точка  $K$  — середина ребра  $BC$ . Найдите расстояния:

- а) от точки  $B$  до прямой  $AC_1$ ;
- б) от точки  $A$  до прямой  $B_1 C_1$ ;
- в) от точки  $K$  до прямой  $A_1 C_1$ ;
- г) от точки  $A$  до плоскости  $BCA_1$ ;
- д) от точки  $K$  до плоскости  $AB_1 C_1$ .

**5А.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , все рёбра которой равны 1. Найдите расстояния:

- а) от точки  $B$  до прямой  $A_1 F_1$ ;
- б) от точки  $B$  до прямой  $FE_1$ ;
- в) от точки  $B$  до прямой  $AD_1$ ;
- г) от точки  $A$  до прямой  $D_1 F_1$ ;
- д) от точки  $A$  до прямой  $B_1 E$ ;
- е) от точки  $A$  до плоскости  $DEA_1$ ;
- ж) от точки  $A$  до плоскости  $DEF_1$ ;
- з) от точки  $A$  до плоскости  $BFE_1$ ;
- и) от точки  $A$  до плоскости  $BFA_1$ ;
- к) от точки  $A$  до плоскости  $CEF_1$ .

**6А.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Стороны основания равны 1, боковые рёбра равны 2. Точка  $G$  — середина ребра  $SC$ . Найдите расстояния:

- а) от точки  $S$  до прямой  $BF$ ;
- б) от точки  $B$  до прямой  $SA$ ;
- в) от точки  $F$  до прямой  $BG$ ;
- г) от точки  $A$  до прямой  $SD$ ;
- д) от точки  $A$  до прямой  $SC$ ;
- е) от точки  $A$  до плоскости  $SDE$ ;
- ж) от точки  $A$  до плоскости  $SBF$ ;
- з) от точки  $A$  до плоскости  $SCE$ .

**7А.** Основание прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — ромб  $ABCD$ , в котором  $AB = 10$ ,  $AC = 6\sqrt{7}$ . Боковое ребро  $AA_1$  равно  $3\sqrt{21}$ . Найдите расстояние от вершины  $B$  до прямой  $AC_1$ .

**8А.** Ребро  $AD$  пирамиды  $DABC$  перпендикулярно плоскости основания  $ABC$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости, проходящей через середины ребер  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$ , если  $AD = 2\sqrt{5}$ ,  $AB = AC = 10$ ,  $BC = 4\sqrt{5}$ .

**9А.** На продолжении ребра  $SK$  за точку  $K$  правильной четырехугольной пирамиды  $SKLMN$  с вершиной  $S$  взята точка  $A$  так, что расстояние от точки  $A$  до плоскости  $MNS$  равно 24. Найдите длину отрезка  $KA$ , если  $SL = 2\sqrt{41}$ ,  $MN = 16$ .

**10А.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $8\sqrt{6}$ . Найдите расстояние от середины ребра  $B_1 C_1$  до прямой  $MT$ , где точки  $M$  и  $T$  — середины ребер  $CD$  и  $A_1 B_1$  соответственно.

**11А.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 1. Найдите расстояние от середины отрезка  $BC_1$  до плоскости  $AB_1 D_1$ .

**12А.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 1. Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $A_1 B T$ , где  $T$  — середина ребра  $AD$ .

**13А.** В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  лежит равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AB$ , равной  $2\sqrt{10}$ ; высота призмы равна  $2\sqrt{5}$ . Найдите расстояние от точки  $C_1$  до плоскости  $BCM$ , где  $M$  — середина ребра  $A_1 C_1$ .

**14А.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка  $D$  — середина ребра  $CC_1$ . Найдите расстояние от вершины  $C$  до плоскости  $ADB_1$ .

**ОТВЕТЫ**

- 1А. а)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ; б) 1; в) 1; г)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ; д)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; е)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 2А. а)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ; в)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ; г)  $\frac{\sqrt{6}}{9}$ . 3А. а) 1; б)  $\frac{\sqrt{11}}{4}$ ; в)  $\frac{1}{2}$ ; г)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; д)  $\frac{1}{2}$ . 4А. а)  $\frac{\sqrt{14}}{4}$ ; б)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ; в)  $\frac{\sqrt{19}}{4}$ ; г)  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ; д)  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ . 5А. а)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ; б)  $\sqrt{3}$ ; в)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ; г)  $\sqrt{2}$ ; д)  $\frac{\sqrt{30}}{5}$ ; е)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; ж)  $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ ; з)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ; и)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ; к)  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ . 6А. а)  $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ; б)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ; в)  $\frac{\sqrt{42}}{4}$ ; г)  $\sqrt{3}$ ; д)  $\frac{\sqrt{39}}{4}$ ; е)  $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ ; ж)  $\frac{\sqrt{39}}{13}$ ; з)  $\frac{3\sqrt{39}}{13}$ . 7А. 8. 8А. 2. 9А.  $3\sqrt{41}$ . 10А. 12. 11А.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 12А.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ . 13А. 2. 14А.  $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ .

**Уровень В**

**1В.** В основании пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со стороной  $AB = 4$  и диагональю  $BD = 7$ . Все боковые ребра пирамиды равны 4. На диагонали  $BD$  основания  $ABCD$  отмечена точка  $E$ , а на ребре  $AS$  – точка  $F$  так, что  $SF = BE = 3$ .

- а) Докажите, что плоскость  $CEF$  параллельна ребру  $SB$ .  
 б) Плоскость  $CEF$  пересекает ребро  $SD$  в точке  $Q$ . Найдите расстояние от точки  $Q$  до плоскости  $ABC$ .

**2В.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона  $AB$  основания равна 12, а высота призмы равна 2. На ребрах  $B_1C_1$  и  $AB$  отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причем  $PC_1 = 3$ ,  $AQ = 4$ . Плоскость  $A_1PQ$  пересекает ребро  $BC$  в точке  $M$ .

- а) Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $BC$ .  
 б) Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $A_1PQ$ .

**3В.** На ребрах  $CD$  и  $BB_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 12 отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причем  $DP = 4$ ,  $B_1Q = 3$ . Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- а) Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .  
 б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $APQ$ .

**4В.** В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 16$ ,  $AA_1 = 4\sqrt{2}$ . Точка  $Q$  – середина ребра  $A_1B_1$ , а точка  $P$  делит ребро  $B_1C_1$  в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $C_1$ . Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .
- Найдите расстояние от точки  $A_1$  до плоскости  $APQ$ .

**5В.** В правильной четырехугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона  $AB$  основания равна 8, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $4\sqrt{2}$ . На ребрах  $BC$  и  $C_1 D_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причем  $BK = C_1 L = 2$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $BD$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $A_1 C$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ .
- Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $\alpha$ .

**6В.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона  $AB$  основания равна 12, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $3\sqrt{6}$ . На ребрах  $AB$  и  $B_1 C_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причем  $AK = 2$ ,  $B_1 L = 4$ . Точка  $M$  – середина ребра  $A_1 C_1$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $AC$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ .
- Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ .

**7В.** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  все ребра равны 5. На ребрах  $SA$ ,  $AB$ ,  $BC$  взяты точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  соответственно так, что  $PA = AQ = RC = 2$ .

- Докажите, что плоскость  $PQR$  перпендикулярна ребру  $SD$ .
- Найдите расстояние от точки  $D$  до плоскости  $PQR$ .

**8В.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 30, а боковое ребро  $SA$  равно 28. Точки  $M$  и  $N$  – середины ребер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении  $5 : 1$ , считая от точки  $C$ .

- Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ .

**9В.** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  основание  $ABCD$  — квадрат. Точка  $M$  — центр боковой грани  $BCC_1 B_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $A_1 D_1 M$  делит диагональ  $AC_1$  в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $A$ .

б) Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $BD_1$ , если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 3.

**10В.** Дана треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$  с основаниями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Точка  $M$  — центр боковой грани  $BCC_1B_1$ .

- Постройте точку пересечения прямой  $A_1M$  с плоскостью  $ABC$ .
- Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB_1$ , если призма прямая,  $ABC$  — прямоугольный треугольник с прямым углом  $C$ , а диагонали боковых граней  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$  равны 17 и 15 соответственно.

**11В.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ .

- Докажите, что плоскость  $CA_1F_1$  делит ребро  $BB_1$  пополам.
- Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $A_1F_1$ , если стороны основания призмы равны 5, а боковые рёбра равны 11.

**12В.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$ , проходящая через ребро  $AB$  и середину ребра  $SE$ , делит ребро  $SC$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $S$ .
- Найдите расстояние от точки  $S$  до плоскости  $\alpha$ , если сторона основания пирамиды равна  $2\sqrt{3}$ , а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен  $60^\circ$ .

**13В.** Основание пирамиды  $DABC$  — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Высота пирамиды проходит через середину ребра  $AC$ , а боковая грань  $ACD$  — равносторонний треугольник.

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро  $BC$  и произвольную точку  $M$  ребра  $AD$ , — прямоугольный треугольник.
- Найдите расстояние от вершины  $D$  до этой плоскости, если  $M$  — середина ребра  $AD$ , а высота пирамиды равна 6.

**14В.** Основание пирамиды  $SABCD$  — прямоугольник  $ABCD$ . Высота  $SH$  пирамиды лежит в плоскости  $CSD$ .

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро  $BC$  и произвольную точку  $M$  ребра  $SA$ , отличную от  $S$  и  $A$ , — прямоугольная трапеция.
- Найдите расстояние от вершины  $S$  до этой плоскости, если  $H$  — середина ребра  $CD$ ,  $M$  — середина ребра  $SA$ ,  $SC = CD$ ,  $SH = 2\sqrt{3}$ .

**15В.** Основание пирамиды  $SABCD$  — квадрат  $ABCD$ . Боковое ребро  $SD$  перпендикулярно плоскости основания. Точка  $M$  — середина высоты пирамиды.

- Докажите, что прямая  $SB$  параллельна плоскости  $ACM$ .
- Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $ACM$ , если  $AB = 8$ , а угол между плоскостью  $ACM$  и плоскостью основания пирамиды равен  $45^\circ$ .

**16В.** Основание пирамиды  $SABCD$  — прямоугольник  $ABCD$ . Боковое ребро  $SD$  перпендикулярно плоскости основания.

- Докажите, что прямые  $SC$  и  $AD$  перпендикулярны.
- Пусть  $M$  — середина высоты пирамиды. Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $ACM$ , если  $AB = 8$ ,  $BC = 6$ , а синус угла между плоскостью  $ACM$  и плоскостью основания пирамиды равен  $5/6$ .

**17В.** Основание шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Высота пирамиды втрое больше стороны основания и проходит через точку  $E$ .

а) Докажите, что угол между боковой гранью  $ASB$  и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $ASB$ , если сторона основания пирамиды равна 4.

**18В.** Основание шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$  с центром  $O$ . Отрезок  $OA_1$  — высота призмы.

а) Докажите, что плоскость  $FF_1E$  перпендикулярна плоскости основания призмы.

б) Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BCC_1$ , если сторона основания призмы равна  $2\sqrt{3}$ .

**19В.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $ADC_1$  перпендикулярна плоскости  $FBB_1$ .

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $ADC_1$ , если  $AA_1 = 4$ , а косинус угла между прямой  $AC_1$  и плоскостью  $ABC$  равен  $\frac{3}{\sqrt{13}}$ .

**20В.** Дана правильная четырёхугольная призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  со стороной основания  $\sqrt{2}$  и боковым ребром 2. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $A_1B_1$  и  $CC_1$  соответственно.

а) Докажите, что  $MN \perp BC_1$ .

б) Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости  $BC_1D$ .

**21В.** Основание пирамиды  $SABCD$  — равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ , причём  $AD = 2BC = 2AB$ . Высота  $SH$  пирамиды проходит через точку пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

а) Докажите, что треугольник  $SBD$  прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $ASD$ , если  $SH = BC = 4$ .

**22В.** Основание пирамиды  $SABCD$  — прямоугольная трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$  и прямым углом  $D$ . Высота  $SH$  пирамиды проходит через точку пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

а) Докажите, что грань  $ASD$  — прямоугольный треугольник.

б) Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $ASD$ , если  $AD = 3BC = 3$ ,  $\angle BAD = 45^\circ$  и  $SH = 4$ .

**23В.** Боковые рёбра пирамиды  $SABC$  с вершиной  $S$  попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что высота  $SH$  пирамиды проходит через точку пересечения высот основания  $ABC$ .

б) Найдите  $SH$ , если боковые рёбра равны 2, 2 и  $7\sqrt{2}$ .

**24В.** Боковые рёбра пирамиды  $SABC$  с вершиной  $S$  попарно перпендикулярны,  $M$  — произвольная точка на ребре  $BC$ .

- Докажите, что плоскости  $AMS$  и  $BSC$  перпендикулярны.
- Высота  $SH$  пирамиды равна 12. Прямая  $AH$  пересекает ребро  $BC$  в точке  $K$ . Найдите расстояние от точки  $K$  до прямой  $AS$ , если  $AS = 20$ .

**25В.** Плоскость проходит через середины боковых рёбер  $DA$  и  $DC$  треугольной пирамиды  $DABC$  и точку пересечения медиан основания  $ABC$ .

- Постройте точку пересечения этой плоскости с прямой  $DB$ .
- Найдите расстояние от точки  $A$  до этой плоскости, если все рёбра пирамиды равны  $3\sqrt{6}$ .

**26В.** Плоскость проходит через середины сторон  $AD$  и  $BC$  основания  $ABCD$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  и точку пересечения медиан боковой грани  $CSD$ .

- Постройте точку пересечения прямой  $AS$  с этой плоскостью.
- Найдите расстояние от точки  $B$  до этой плоскости, если все рёбра пирамиды равны  $2\sqrt{3}$ .

**27В.** Все грани параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  — равные ромбы, причём плоские углы при вершине  $C$  острые.

- Докажите, что  $AA_1 \perp BD$ .
- Найдите расстояние от вершины  $C$  до плоскости  $A_1B_1C_1$ , если плоские углы при вершине  $C$  равны  $60^\circ$ , а  $AA_1 = \sqrt{6}$ .

**28В.** Основание наклонной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — равносторонний треугольник  $ABC$ . Боковые грани  $AA_1B_1B$  и  $AA_1C_1C$  — равные ромбы с острым углом при общей вершине  $A$ .

- Докажите, что боковая грань  $BB_1C_1C$  — квадрат.
- Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $BB_1C_1$ , если  $\angle CAA_1 = 60^\circ$ , а сторона основания призмы равна  $\sqrt{2}$ .

**29В.** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Боковые рёбра  $SA$  и  $SD$  равны. Точка  $M$  лежит на боковом ребре  $SC$  и не совпадает с его концами. Плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $M$  параллельно прямым  $BC$  и  $SA$ .

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$  — равнобедренная трапеция.
- Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ , если боковая сторона этой трапеции равна меньшему основанию, а все рёбра пирамиды равны 1.

**30В.** Точка  $K$  лежит на стороне  $AB$  основания  $ABCD$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$ , все рёбра которой равны. Плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $K$  параллельно плоскости  $ASD$ . Сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$  — четырёхугольник, в который можно вписать окружность.

- Докажите, что  $BK = 2AK$ .
- Найдите расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $\alpha$ , если все рёбра пирамиды равны 1.



**31В.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах  $AB$ ,  $CD$  и  $AS$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = DN = 4$  и  $AK = 3$ .

- а) Докажите, что плоскости  $MNK$  и  $SBC$  параллельны.  
 б) Найдите расстояние от точки  $K$  до плоскости  $SBC$ .

**32В.**  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма, сторона  $AB$  равна 16. Через точки  $M$  и  $P$ , лежащие на рёбрах  $AC$  и  $BB_1$  соответственно, проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AB$ . Сечение призмы этой плоскостью — четырёхугольник, одна сторона которого равна 16, а три другие равны между собой.

- а) Докажите что периметр сечения призмы плоскостью  $\alpha$  больше 40.  
 б) Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ , если упомянутый периметр равен 46.

**33В.** Точка  $O$  — центр основания  $ABCDEF$  правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$ . Точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $T$  — середины отрезков  $AF$ ,  $SF$ ,  $SD$ ,  $MK$  соответственно.

- а) Докажите, что точка  $T$  лежит на отрезке  $LO$ .  
 б) Найдите  $CT$ , если сторона основания пирамиды равна 4, а высота пирамиды равна 48.

### ОТВЕТЫ

- 1В.  $\frac{2\sqrt{15}}{7}$ . 2В.  $\frac{3\sqrt{30}}{5}$ . 3В.  $\frac{12\sqrt{26}}{13}$ . 4В.  $\frac{32\sqrt{57}}{57}$ . 5В.  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ . 6В.  $\sqrt{2}$ . 7В.  $\frac{7}{2}$ . 8В.  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ . 9В.  $\sqrt{5}$ . 10В.  $\frac{60}{17}$ . 11В. 14. 12В. 3. 13В.  $2\sqrt{3}$ . 14В. 2. 15В. 4. 16В. 4. 17В. 3. 18В. 3. 19В.  $\frac{12}{5}$ . 20В.  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ . 21В.  $\sqrt{3}$ . 22В.  $\frac{8}{5}$ . 23В.  $\frac{7}{5}$ . 24В. 15. 25В. 2. 26В. 1. 27В. 2. 28В. 1. 29В.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ . 30В.  $\frac{\sqrt{6}}{9}$ . 31В.  $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ . 32В.  $\frac{24\sqrt{273}}{91}$ . 33В. 13.