

## ПЛОЩАДЬ СЕЧЕНИЯ

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 13 профильного ЕГЭ по теме «Площадь сечения». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

При нахождении угла между двумя плоскостями можно использовать **теорему о площади ортогональной проекции многоугольника**. При применении этого метода угол  $\varphi$  между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  можно вычислить, используя формулу  $\cos \varphi = \frac{S_{\text{пр}}}{S}$ , где  $S$  - площадь многоугольника, лежащего в плоскости  $\alpha$ ,  $S_{\text{пр}}$  - площадь его ортогональной проекции на плоскость  $\beta$ . Следовательно, площадь многоугольника, лежащего в плоскости  $\alpha$  равна  $S = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos \varphi}$ .

### Уровень А

**1А.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) две его диагонали;
- б) середины трёх рёбер, исходящих из одной вершины;
- в) вершину  $B_1$  и середины рёбер  $AB$  и  $AD$ ;
- г) диагональ  $AC_1$  параллельно прямой  $BD$ ;
- д) середину ребра  $AB$  параллельно прямым  $BD$  и  $BC_1$ .

**2А.** Дан правильный тетраэдр  $ABCD$  с ребром  $a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) середину ребра  $AD$  параллельно плоскости  $ABC$ ;
- б) вершину  $D$  и середины рёбер  $AB$  и  $BC$ ;
- в) середину ребра  $AB$  параллельно рёбрам  $AC$  и  $BD$ ;
- г) высоту  $DH$  тетраэдра параллельно ребру  $AC$ ;
- д) центры граней  $ABC$ ,  $ABD$  и  $BCD$ .

**3А.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Все рёбра пирамиды равны  $a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) середину ребра  $SA$  параллельно плоскости основания пирамиды;
- б) диагональ  $BD$  основания и середину ребра  $SC$ ;
- в) ребро  $AB$  и середину ребра  $SD$ ;
- г) центр основания параллельно плоскости  $ASB$ ;
- д) середину ребра  $SC$  и точку  $A$  параллельно диагонали  $BD$  основания.

**4А.** Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Все рёбра призмы равны  $a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) вершины  $A, B_1$  и  $C$ ;
- б) ребро  $BC$  и центр основания  $A_1B_1C_1$ ;
- в) центры граней  $ABC, AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$ ;
- г) прямую  $BC_1$  параллельно медиане  $AM$  основания  $ABC$ ;
- д) середину ребра  $BB_1$  параллельно прямым  $BA_1$  и  $B_1C_1$ .

**5А.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ . Все рёбра призмы равны  $a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) вершины  $A, B$  и  $C_1$ ;
- б) вершины  $B, F$  и  $C_1$ ;
- в) вершины  $A, B$  и  $D_1$ ;
- г) центр основания  $ABCDEF$  параллельно прямым  $DE$  и  $AE_1$ ;
- д) середины рёбер  $BC, EF$  и центр грани  $AA_1B_1B$ .

**6А.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Стороны основания пирамиды равны  $a$ , а боковые рёбра равны  $2a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) вершину  $S$  и диагональ  $BD$  основания;
- б) середины рёбер  $AB$  и  $EF$  параллельно высоте пирамиды;
- в) вершину  $S$  и середины рёбер  $AB$  и  $AF$ ;
- г) точки  $A, D$  и середину ребра  $SE$ ;
- д) ребро  $AB$  и середину ребра  $SD$ .

### ОТВЕТЫ

**1А.** а)  $a^2\sqrt{2}$ ; б)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ ; в)  $\frac{9a^2}{8}$ ; г)  $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ ; д)  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ . **2А.** а)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ ; б)  $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$ ;  
 в)  $\frac{a^2}{4}$ ; г)  $\frac{a^2\sqrt{6}}{9}$ ; д)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$ . **3А.** а)  $\frac{a^2}{4}$ ; б)  $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ ; в)  $\frac{3a^2\sqrt{11}}{16}$ ; г)  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$ ; д)  
 $\frac{a^2\sqrt{10}}{6}$ . **4А.** а)  $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$ ; б)  $\frac{5a^2\sqrt{39}}{36}$ ; в)  $\frac{a^2\sqrt{39}}{12}$ ; г)  $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ ; д)  $\frac{3a^2\sqrt{7}}{16}$ . **5А.** а)  
 $\frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$ ; б)  $a^2\sqrt{6}$ ; в)  $3a^2$ ; г)  $\frac{3a^2}{2}$ ; д)  $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$ . **6А.** а)  $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$ ; б)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ ; в)  
 $\frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$ ; г)  $\frac{5a^2\sqrt{15}}{16}$ ; д)  $\frac{13a^2\sqrt{39}}{48}$ .

### Уровень В

**1В.** Точки  $P$  и  $Q$  — середины рёбер  $AD$  и  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  соответственно.

а) Докажите, что прямые  $B_1 P$  и  $Q B$  перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку  $P$  и перпендикулярной прямой  $BQ$ , если ребро куба равно 2.

**2В.** В основании правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  лежит треугольник  $ABC$  со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре  $AD$  отмечена точка  $T$  так, что  $AT : TD = 2 : 1$ . Через точку  $T$  параллельно прямым  $AC$  и  $BD$  проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

**3В.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны длины рёбер:  $AB = 4$ ,  $BC = 3$ ,  $AA_1 = 2$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины рёбер  $A_1 B_1$  и  $CC_1$  соответственно. Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $B_1 C_1$  в точке  $U$ .

а) Докажите, что  $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$ .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью  $APQ$ .

**4В.** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $4\sqrt{3}$ . На рёбрах  $AB$ ,  $A_1 D_1$  и  $C_1 D_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = A_1 N = C_1 K = 1$ .

а) Пусть  $L$  — точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $BC$ . Докажите, что  $MNKL$  — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

**5В.** Дан прямой круговой конус с вершиной  $M$ . Осевое сечение конуса — треугольник с углом  $120^\circ$  при вершине  $M$ . Образующая конуса равна  $2\sqrt{3}$ . Через точку  $M$  проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник тупоугольный.

б) Найдите площадь сечения.

**6В.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 24, а боковое ребро  $SA$  равно 19. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении  $5 : 1$ , считая от точки  $C$ .

б) Найдите площадь многоугольника, который является сечением пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

**7В.** На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1 E : EA = 5 : 3$ , на ребре  $BB_1$  — точка  $F$  так, что  $B_1 F : FB = 5 : 11$ , а точка  $T$  — середина ребра  $B_1 C_1$ . Известно, что  $AB = 6\sqrt{2}$ ,  $AD = 10$ ,  $AA_1 = 16$ .

- Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $EFT$ .

**8В.** На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1 E = 6EA$ . Точка  $T$  — середина ребра  $B_1 C_1$ . Известно, что  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $AD = 12$ ,  $AA_1 = 14$ .

- Докажите, что плоскость  $ETD_1$  делит ребро  $BB_1$  в отношении  $4 : 3$ .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $ETD_1$ .

**9В.** В правильной четырехугольной пирамиде  $PABCD$ , все ребра которой равны 4, точка  $K$  — середина бокового ребра  $AP$ .

- Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $K$  и параллельной прямым  $PB$  и  $BC$ .
- Найдите площадь сечения.

**10В.** Дана правильная четырехугольная призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $AK : KA_1 = 1 : 2$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $B$  и  $K$  параллельно прямой  $AC$ . Эта плоскость пересекает ребро  $DD_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что  $MD : MD_1 = 2 : 1$
- Найдите площадь сечения, если  $AB = 4$ ,  $AA_1 = 6$ .

**11В.** На ребре  $AB$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  отмечена точка  $Q$ , причём  $AQ : QB = 1 : 2$ . Точка  $P$  — середина ребра  $AS$ .

- Докажите, что плоскость  $DPQ$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Найдите площадь сечения  $DPQ$ , если площадь сечения  $DSB$  равна 6.

**12В.** В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки  $G$  и  $F$  делят стороны основания  $AB$  и  $AC$  соответственно так, что  $AG : GB = AF : FC = 1 : 5$ .

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $MGF$  является равнобедренным треугольником.
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $MGF$ .

**13В.** Через вершину  $S$  и диагональ  $BD$  основания правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  проведена плоскость  $\alpha$ .

- Докажите, что расстояние от центра основания до этой плоскости в три раза меньше расстояния до этой плоскости от точки  $F$ .
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если сторона основания равна  $\sqrt{3}$ , а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .

**14В.** Плоскость  $\alpha$  проходит через сторону  $AB$  основания  $ABC$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  и середину ребра  $B_1C_1$ .

а) Пусть  $M$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с прямой  $CC_1$ . Докажите, что  $C_1$  — середина отрезка  $CM$ .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если все рёбра призмы равны 4.

**15В.** Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна основанию правильной треугольной пирамиды  $SABC$  с вершиной  $S$  и делит стороны  $AB$  и  $BC$  основания пополам.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит боковое ребро в отношении  $1 : 3$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 4.

**16В.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $PABCD$  с вершиной в точке  $P$ . Через точку  $C$  и середину ребра  $AB$  перпендикулярно к основанию пирамиды проведена плоскость  $\alpha$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $BP$  в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $B$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если известно, что  $PA = 10$ ,  $AC = 16$ .

**17В.** В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной  $S$  стороны основания  $ABCDEF$  равны 6, а боковые рёбра равны 12. Точки  $K$  и  $M$  — середины рёбер  $BF$  и  $SE$  соответственно.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью  $BKM$ .

б) Найдите площадь полученного сечения.

**18В.** Точка  $M$  — середина ребра  $CD$  единичного куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Через вершину  $A_1$  проведена плоскость, параллельная прямым  $AM$  и  $D_1M$ .

а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра  $AB$ .

б) Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

**19В.** Дан параллелепипед  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с основаниями  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AD$  и  $CD$  соответственно, точка  $K$  лежит на ребре  $BB_1$ , причём  $B_1K : KB = 1 : 2$ .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ , делит ребро  $CC_1$  в отношении  $2 : 7$ , считая от точки  $C$ .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью, если параллелепипед  $ABCA_1B_1C_1D_1$  — правильная четырёхугольная призма, сторона основания  $ABCD$  равна  $4\sqrt{2}$ , а боковое ребро равно 12.

**20В.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  проведено сечение плоскостью, проходящей через середину  $M$  ребра  $AB$ , точку  $B_1$  и точку  $K$ , лежащую на ребре  $AC$  и делящую его в отношении  $AK : KC = 1 : 3$ .

а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра  $A_1C_1$ .

б) Найдите площадь сечения, если известно, что сторона основания призмы равна  $4\sqrt{2}$ , а высота призмы равна  $8\sqrt{2}$ .

**21В.** Основание четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра  $AB$  параллельно плоскости  $SAD$ .

б) Найдите площадь полученного сечения, если площадь грани  $SAD$  равна 16.

**22В.** Основанием пирамиды  $SABCD$  с равными боковыми рёбрами является прямоугольник  $ABCD$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через сторону  $AB$  основания и середину высоты пирамиды.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит боковое ребро  $SD$  в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = 6$ ,  $AD = 8$ , а высота пирамиды равна 6.

**23В.** Через середину ребра  $AB$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  проведена плоскость, параллельная прямым  $BD_1$  и  $A_1C_1$ .

а) Докажите, что эта плоскость делит диагональ  $DB_1$  в отношении  $3 : 5$ , считая от вершины  $D$ .

б) Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно 4.

**24В.** Дан параллелепипед  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $BA_1$  параллельно прямой  $CB_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит диагональ  $AC_1$  параллелепипеда в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $A$ .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $\alpha$ , если он прямой, его основание  $ABCD$  — ромб с диагоналями  $AC = 10$  и  $BD = 8$ , а боковое ребро параллелепипеда равно 12.

**25В.** Дана треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $BC_1$  параллельно прямой  $AB_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через середину ребра  $AC$ .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если призма правильная, сторона её основания равна  $2\sqrt{3}$ , а боковое ребро равно 1.

**26В.** Все рёбра правильной треугольной пирамиды  $SBCD$  с вершиной  $S$  равны 18. Основание  $O$  высоты  $SO$  этой пирамиды является серединой отрезка  $SS_1$ ,  $M$  — середина ребра  $SB$ , точка  $L$  лежит на ребре  $CD$  так, что  $CL : LD = 7 : 2$ .

а) Докажите, что сечение пирамиды  $SBCD$  плоскостью  $S_1LM$  — равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь этой трапеции.

**27В.** В правильном тетраэдре  $ABCD$  с ребром 10 на ребрах  $AD$ ,  $BD$  и  $AC$  выбраны точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  так, что  $KD = 4$ ,  $MC = 6$ ,  $LD = 8$ . Плоскость, проходящая через точки  $K$ ,  $L$  и  $M$ , пересекает ребро  $BC$  в точке  $P$ .

а) Докажите, что  $CP : PB = 9 : 1$ .

б) Найдите площадь четырёхугольника  $MKLP$ .

**28В.** В основании правильной четырёхугольной пирамиды  $MABCD$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 6. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер  $MA$  и  $MB$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная ребру  $MC$ .

а) Докажите, что сечение плоскостью  $\alpha$  пирамиды  $MABC$  является параллелограмм.

б) Найдите площадь сечения пирамиды  $MABC$  плоскостью  $\alpha$ .

**29В.** В правильной треугольной усеченной пирамиде  $ABCA_1B_1C_1$  площадь нижнего основания  $ABC$  в девять раз больше площади меньшего основания  $A_1B_1C_1$ . Через ребро  $AB$  проведена плоскость  $\alpha$ , которая пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $N$  и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

а) Докажите, что точка  $N$  делит ребро  $CC_1$  в отношении  $5 : 13$ , считая от вершины  $C_1$ .

б) Найдите площадь сечения усеченной пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если высота этой пирамиды равна 13, а ребро меньшего основания равно 3.

**30В.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 9, а боковое ребро  $SA$  равно  $\sqrt{43}$ . На рёбрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = 8$ ,  $SK : KB = 7 : 3$ . Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и содержит точки  $M$  и  $K$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $C$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

**31В.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  боковое ребро  $SA$  равно 12, а сторона основания  $AB$  равна 6. В боковых гранях  $SAB$  и  $SAD$  провели биссектрисы  $AL$  и  $AM$  соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $ALM$  делит ребро  $SC$  пополам.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $ALM$ .

### ОТВЕТЫ

1В.  $2\sqrt{5}$ . 2В.  $\frac{20}{3}$ . 3В.  $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ . 4В. 55. 5В.  $4\sqrt{2}$ . 6В. 104. 7В. 97,5. 8В. 90. 9В.  $3\sqrt{3}$ . 10В.  $8\sqrt{6}$ . 11В.  $\sqrt{5}$ . 12В.  $\sqrt{79}$ . 13В.  $\frac{3\sqrt{30}}{4}$ . 14В.  $3\sqrt{19}$ . 15В. 1,5. 16В.  $8\sqrt{10}$ . 17В.  $\frac{39\sqrt{39}}{4}$ . 18В.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ . 19В.  $\frac{140}{3}$ . 20В.  $3\sqrt{195}$ . 21В. 12. 22В.  $\frac{80}{3}$ . 23В.  $7\sqrt{6}$ . 24В. 52. 25В. 3. 26В.  $\frac{23\sqrt{219}}{4}$ . 27В.  $11\sqrt{5}$ . 28В.  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ . 29В. 48,5. 30В.  $\frac{3\sqrt{73}}{5}$ . 31В. 24.