

## ОКРУЖНОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С ТРЕУГОЛЬНИКОМ

В этом разделе будут рассмотрены задачи, содержащие описанные, вписанные и невписанные окружности, связанные с треугольником.

Окружность, **описанная около треугольника** – окружность, на которой лежат все вершины треугольника, при этом треугольник называется вписанным в окружность. Около всякого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы, центр окружности остроугольного треугольника расположен внутри треугольника, центр описанной окружности тупоугольного треугольника — вне треугольника.

Во всяком треугольнике отношение любой стороны к синусу противоположного ей угла постоянно и равно диаметру описанной около треугольника окружности (**обобщенная теорема синусов**), т.е.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности,  $S = \frac{abc}{4R}$ , где  $R$  – радиус описанной окружности. Последнюю формулу используют не только для нахождения площади треугольника, но и для нахождения радиуса описанной окружности. Радиус окружности описанной около прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы.

Окружность называется **вписанной в треугольник**, если она касается всех его сторон; при этом треугольник называется описанным вокруг окружности. Во всякий треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности, т.е.  $S = p r$ , где  $p = \frac{a+b+c}{2}$  – полупериметр, а  $r$  – радиус вписанной окружности. Последнюю формулу используют не только для нахождения площади треугольника, но и для нахождения радиуса вписанной окружности. Для прямоугольного треугольника радиус вписанной окружности  $r = \frac{a+b-c}{2}$ , где  $a, b$  – катеты, а  $c$  – гипотенуза.

**Невписанной в треугольник окружностью** называется окружность, к которой являются касательными одна из сторон треугольника и продолжения двух его других сторон. У каждого треугольника есть три невписанных окружности. Продолжения биссектрис внутренних углов треугольника проходят

через центры вневписанных окружностей, являющихся точками, в которых пересекаются биссектрисы внешних углов этого треугольника. Радиус вневписанной окружности, касающейся стороны треугольника, имеющей длину

$a$ , выражается формулой:  $r = \frac{S}{p - a}$ , где  $S$  и  $p$  – площадь и полупериметр

треугольника.

При решении задач этого раздела полезными будут следующие свойства:

**Центральным углом** в окружности называется угол с вершиной в ее центре (это  $\angle AOB$ ). Часть окружности, расположенная внутри центрального угла, называется **дугой окружности**, соответствующей этому центральному углу. **Градусной мерой дуги** окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла.

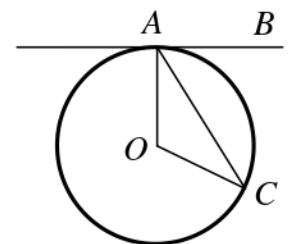
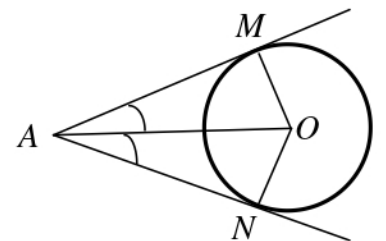
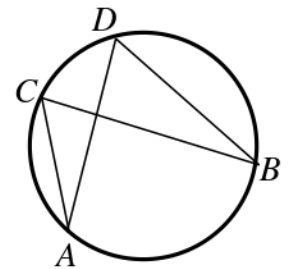
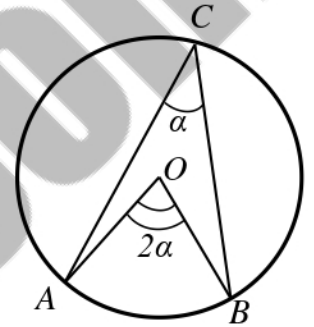
Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным в окружность** (это  $\angle ACB$ ). Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла, т.е.  $\angle AOB = 2\angle ACB$ .

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны ( $\angle ACB = \angle ADB$ ).

**Касательная к окружности:** если из точки к окружности проведены две касательные, то длины отрезков от этой точки до точек касания равны ( $AM = AN$ ) и прямая, проходящая через центр окружности и эту точку, обладает свойством:  $\angle MAO = \angle NAO$ .

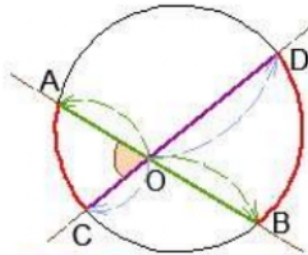
Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному к точке касания ( $OA \perp AB$ ).

Мера угла между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги стягиваемой этой хордой, т.е.  $\angle AOC = 2\angle BAC$ .



### Свойство отрезков секущих:

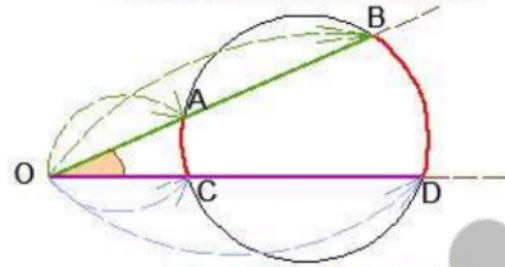
Внутреннее пересечение:



$$1) OC \cdot OD = OA \cdot OB$$

$$2) \angle AOC = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC}}{2}$$

Внешнее пересечение:



$$1) OC \cdot OD = OA \cdot OB$$

$$2) \angle AOC = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{2}$$

Свойство квадрата отрезка касательной:



$$1) OC^2 = OA \cdot OB$$

$$2) \angle AOC = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AC}}{2}$$

квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей

угол между касательной и секущей

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 16 профильного ЕГЭ по теме «Окружности, связанные с треугольником». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

### Уровень А

1А. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, угол при вершине равен  $120^\circ$ . Найдите диаметр описанной окружности.

2А. Под каким углом видна из точек окружности хорда, равная радиусу?

3А. Катеты прямоугольного треугольника равны  $a$  и  $b$ , а гипотенуза равна  $c$ . Найдите радиус вписанной окружности.

4А. Дан треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Найдите радиусы его описанной, вписанной и внеписанных окружностей.

5А. Дан треугольник со сторонами 13, 13 и 10. Найдите радиусы его описанной, вписанной и внеписанных окружностей.

6А. Дан треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Найдите радиусы его описанной, вписанной и внеписанных окружностей.

7А. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если в него вписана окружность с центром  $O$ , причем  $\angle AOC = 165^\circ$ ,  $AB = 8$ ,  $BC = 7$ .

**8А.** Найдите радиус окружности, вписанной в остроугольный треугольник  $ABC$ , если высота  $BH$  равна 12 и известно, что  $\sin \angle A = 12/13$ ,  $\sin \angle C = 4/5$ .

**9А.** В треугольник вписан круг радиуса 4. Одна из сторон треугольника, разделена точкой касания на части 6 и 8. Найдите длины двух других сторон.

**10А.** В треугольник со сторонами  $AB = 8$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = 4$  вписана окружность. Найдите длину отрезка  $DE$ , где  $D$  и  $E$  – точки касания этой окружности со сторонами  $AB$  и  $AC$  соответственно.

**11А.** В треугольник  $ABC$  вписана окружность, которая касается стороны  $AC$  в точке  $M$ . В треугольнике проведена высота  $BO$ , равная 12. Известно, что точка  $M$  делит отрезок  $AO$  на части:  $AM = 14$  и  $MO = 2$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

**12А (ЕГЭ, 2002).** В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания вписанной окружностью в отношении  $8 : 5$ , считая от вершины, лежащей против основания. Найдите основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен 10.

**13А (ЕГЭ, 2002).** В равнобедренный треугольник  $PMK$  с основанием  $MK$  вписана окружность с радиусом  $2\sqrt{3}$ . Высота  $PH$  делится точкой пересечения с окружностью в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $P$ . Найдите периметр треугольника  $PMK$ .

**14А (ЕГЭ, 2002).** В треугольник  $ABC$  вписана окружность с центром  $O$ . Луч  $AO$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AB = 13$ ,  $AC = 15$ ,  $BK = 6,5$ .

**15А (ЕГЭ, 2004).** Основание равнобедренного треугольника равно 36. вписанная окружность касается боковых сторон в точках  $A$  и  $P$ ,  $AP = 12$ . Найдите периметр треугольника.

**16А.** В равнобедренный треугольник  $ABC$  вписана окружность. Параллельно его основанию  $AC$  проведена касательная к окружности, пересекающая боковые стороны в точках  $D$  и  $E$ . Найдите радиус окружности, если  $DE = 8$ ,  $AC = 18$ .

**17А.** Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника, опущенную на основание, на отрезки 5 и 3, считая от вершины. Определите стороны треугольника.

**18А.** К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 и высотой 8, проведена касательная, параллельная основанию. Найдите длину отрезка этой касательной, заключенной между сторонами треугольника.

**19А.** В равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 50, с основанием, равным 30, вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания на боковых сторонах.



**20А.** Боковая сторона и основание равнобедренного треугольника равны соответственно 5 и 6. Определите расстояние между точкой пересечения высот треугольника и центром вписанной в него окружности.

**21А.** Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3. Найдите площадь треугольника.

**22А (ЕГЭ, 2002).** Окружность с центром  $O$ , вписанная в прямоугольный треугольник  $ABC$ , касается гипотенузы  $AB$  в точке  $M$ ,  $AM = 12$ ,  $BM = 8$ . Найдите площадь треугольника  $AOB$ .

**23А.** В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найдите длины сторон треугольника.

**24А.** Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны соответственно  $\sqrt{5}$  и  $\sqrt{10}$ . Найдите катеты.

**25А.** Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Проведена окружность, касающаяся обоих катетов и имеющая центр на гипотенузе. Найдите отрезки, на которые центр окружности делит гипотенузу.

**26А.** Найдите площадь треугольника, если его стороны относятся как 7:15:20, а радиус описанной окружности равен 25.

**27А.** Величины углов треугольника относятся как 2 : 3 : 7. Длина наименьшей стороны равна 5. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

**28А.** В окружность радиуса 4 вписан треугольник с углами  $15^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите площадь треугольника.

**29А.** В треугольнике  $BCE$   $\angle C = 60^\circ$ ,  $CE : BC = 3 : 1$ . Отрезок  $CK$  – биссектриса треугольника. Найдите  $KE$ , если радиус описанной около треугольника окружности равен  $8\sqrt{3}$ .

**30А.** Около треугольника  $ABC$  описана окружность. Медиана треугольника  $AM$  продлена до пересечения с окружностью в точке  $K$ . Найдите сторону  $AC$ , если  $AM = 18$ ,  $MK = 8$ ,  $BK = 10$ .

**31А.** В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $A$  продолжена до пересечения в точке  $D$  с описанной около треугольника окружностью. Найдите длину стороны  $BC$ , если  $AB = 75$ ,  $AC = 48$ ,  $AD = 100$ .

**32А (ЕГЭ, 2004).** Треугольник  $BMP$  с углом  $B$ , равным  $45^\circ$ , вписан в окружность радиуса  $6\sqrt{2}$ . Найдите длину медианы  $BK$ , если луч  $BK$  пересекает окружность в точке  $C$  и  $CK = 3$ .

**33А.** Одна из сторон треугольника является диаметром описанной около него окружности. Другая сторона треугольника равна  $4\sqrt{2}$ , а проекция третьей стороны на диаметр равна 14. Найдите радиус окружности.

**34А.** В окружность радиуса  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$  вписан правильный треугольник  $ABC$ . Хорда  $BD$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $E$ ,  $AE : EC = 3 : 5$ . Найдите  $BE$ .

**35А.** Найдите основание тупоугольного равнобедренного треугольника, вписанного в окружность радиуса  $4\sqrt{15}$ , если расстояние от центра окружности до боковой стороны треугольника равно 15.

**36А.** Длина высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, равна 8, а радиус описанной окружности равен 5. Найдите площадь треугольника.

**37А.** Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2, а радиус описанной окружности равен 5. Найдите больший катет треугольника.

**38А.** Периметр прямоугольного треугольника равен 72, а радиус вписанной в него окружности – 6. Найдите диаметр описанной окружности.

**39А.** Длины катетов прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

**40А (ЕГЭ, 2002).** Один из катетов прямоугольного треугольника равен 20, а проекция другого катета на гипотенузу равна 9. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника.

**41А.** В прямоугольном треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно  $\frac{2}{5}$ . Найдите острые углы треугольника.

**42А.** В прямоугольный треугольник  $ABC$  с углом  $A$ , равным  $30^\circ$ , вписана окружность радиуса  $\sqrt{2}$ . Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны  $BC$  и продолжений двух других сторон. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

**43А.** В треугольнике  $PQR$  угол  $QRP$  равен  $60^\circ$ . Найдите расстояние между точками касания со стороной  $QR$  окружности радиуса 2, вписанной в треугольник, и окружности радиуса 3, касающейся продолжений сторон  $PQ$  и  $PR$ .

**44А.** Равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной 3 вписан в окружность. Точка  $D$  лежит на окружности, причём хорда  $AD$  равна  $\sqrt{3}$ . Найдите хорды  $BD$  и  $CD$ .

**45А.** Пусть  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ,  $\angle AOC = 60^\circ$ . Найдите угол  $AMC$ , где  $M$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

**46А.** Из точки  $M$  на окружности проведены три хорды:  $MN = 1$ ,  $MP = 6$ ,  $MQ = 2$ . При этом углы  $NMP$  и  $PMQ$  равны. Найдите радиус окружности.

**47А.** К окружности, вписанной в треугольник со сторонами 6, 10 и 12, проведена касательная, пересекающая две большие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

**48А.** Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен  $120^\circ$ . Найдите площадь треугольника.

**49А.** В треугольник  $ABC$  вписана окружность. Точка касания окружности стороны  $AC$  делит ее на отрезки с длинами 6 и 4. Периметр треугольника равен 24. Найдите синус угла  $BAC$ .

**50А.** Дан треугольник  $ABC$ , для которого  $AB = 5$ ,  $BC = 8$ . В треугольник вписана окружность, касающаяся стороны  $BC$  в точке  $P$ . Известно, что  $BP = 3$ . Найдите площадь треугольника  $BMP$ , где  $M$  – точка касания окружности со стороной треугольника  $ABC$ .

**51А (ЕГЭ, 2010).** В треугольнике  $ABC$   $AB = 7$ ,  $BC = 9$ ,  $CA = 4$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  так, что  $BD : DC = 1 : 5$ . Окружности, вписанные в каждый из треугольников  $ADC$  и  $ADB$ , касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найти длину отрезка  $EF$ .

**52А.** Стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  равны соответственно 26 и 14,5, а его высота  $BD$  равна 10. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $BCD$ .

**53А.** Окружность описана около равностороннего треугольника  $ABC$ . На дуге  $BC$ , не содержащей точку  $A$ , расположена точка  $M$ , делящая градусную меру этой дуги в отношении 1 : 2. Найдите углы треугольника  $AMB$ .

**54А.** Треугольник  $ABC$  равнобедренный. Радиус  $OA$  описанного круга образует с основанием  $AC$  угол  $OAC$ , равный  $20^\circ$ . Найдите угол  $BAC$ .

**55А.** В окружность радиуса 5 вписан равнобедренный треугольник, сумма основания и высоты которого равна 16. Найдите высоту треугольника.

**56А.** Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равна  $20\pi$ . Найдите площадь этого треугольника, если его основание равно 12.

**57А.** Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник  $ABC$ , касается его боковых сторон  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Найдите  $AB$ , если  $AC = 8$  и  $MN = 3$ .

**58А.** В треугольнике  $ABC$   $AB = BC = 10$ ,  $AC = 12$ . В треугольник вписана окружность. Касательная к этой окружности, параллельная высоте  $BD$ , пересекает стороны треугольника в точках  $F$  и  $E$ . Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника  $CFE$ .

**59А.** На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные 1 и 2. Найдите основание треугольника.



**60А.** Одна окружность описана около равностороннего треугольника  $ABC$ , а вторая вписана в угол  $A$  и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

### ОТВЕТЫ

1А. 4. 2А.  $30^\circ$  или  $150^\circ$ . 3А.  $\frac{a+b-c}{2}$ . 4А. 2,5; 1; 6; 3; 2. 5А.  $\frac{169}{24}$ ;  $\frac{10}{3}$ ;  $\frac{15}{2}$ ; 12; 12.  
 6А.  $\frac{65}{8}$ ; 4;  $\frac{21}{2}$ ; 12; 14. 7А. 14. 8А. 4. 9А. 13 и 15. 10А.  $\frac{3\sqrt{10}}{4}$ . 11А. 126. 12А. 30. 13А. 36. 14А. 84. 15А. 90. 16А. 6. 17А. 10, 10 и 12. 18А. 3. 19А. 21. 20А.  $\sqrt{3}-1,5$ . 21А. 60. 22А. 40. 23А. 9, 12 и 15. 24А. 3 и 4. 25А.  $\frac{20}{7}$  и  $\frac{15}{7}$ . 26А. 168.  
 27А. 5. 28А.  $4\sqrt{3}$ . 29А. 18. 30А. 15. 31А. 98,4. 32А. 12. 33А. 8. 34А. 7. 35А. 15. 36А. 32. 37А. 8. 38А. 30. 39А.  $\sqrt{5}$ . 40А. 25. 41А.  $\arctg\frac{3}{4}$ ,  $\operatorname{arccctg}\frac{3}{4}$ . 42А. 4.  
 43А.  $\sqrt{3}$ . 44А.  $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$  или  $2\sqrt{3}, \sqrt{3}$ . 45А.  $165^\circ$  или  $105^\circ$ . 46А.  $\frac{2\sqrt{510}}{15}$ . 47А. 16.  
 48А.  $4\sqrt{3}$ . 49А. 0,6 или 0,8. 50А.  $\frac{9\sqrt{3}}{4}$  или  $\frac{75\sqrt{3}}{28}$ . 51А. 4,5 или 6. 52А.  $5\sqrt{2}$  или  $\sqrt{2}$ . 53А.  $40^\circ$ ;  $80^\circ$ ;  $60^\circ$  или  $60^\circ$ ;  $20^\circ$ ;  $100^\circ$ . 54А.  $35^\circ$  или  $55^\circ$ . 55А. 6,4 или 8. 56А. 12 или 108. 57А. 4 или 12. 58А. 2,5 или  $\frac{\sqrt{97}}{2}$ . 59А.  $\sqrt{6}$  или  $\sqrt{12}$ .  
 60А. 3 : 2 или 1 : 2.

### Уровень В

**1В (ЕГЭ 2015).** Окружность, построенная на медиане  $BM$  равнобедренного треугольника  $ABC$  как на диаметре, второй раз пересекает основание  $BC$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что отрезок  $BK$  втрое больше отрезка  $CK$ .

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону  $AB$  в точке  $N$ . Найдите  $AB$ , если  $BK = 18$  и  $BN = 17$ .

**2В.** В треугольник  $ABC$  вписана окружность радиуса  $R$ , касающаяся стороны  $AC$  в точке  $M$ , причем  $AM = 2R$  и  $CM = 3R$ .

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что  $R = 2$ .



**3В.** Прямые, содержащие катеты  $AC$  и  $CB$  прямоугольного треугольника  $ACB$ , являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу  $AB$ , является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника  $ACB$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ACB$ .

**4В.** Точка  $B$  лежит на отрезке  $AC$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , касается окружности с диаметром  $BC$  в точке  $M$  и второй раз пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $K$ . Продолжение отрезка  $MB$  пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $D$ .

а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $MC$  параллельны.

б) Найдите площадь треугольника  $DBC$ , если  $AK = 3$  и  $MK = 12$ .

**5В.** В треугольник  $ABC$  вписана окружность радиуса  $R$ , касающаяся стороны  $AC$  в точке  $D$ , причём  $AD = R$ .

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите площадь треугольника  $BEF$ , если известно, что  $R = 5$  и  $CD = 15$ .

**6В (ЕГЭ 2014).** Около остроугольного треугольника  $ABC$  описана окружность с центром  $O$ . На продолжении отрезка  $AO$  за точку  $O$  отмечена точка  $K$  так, что  $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$ .

а) Докажите, что четырёхугольник  $OBKC$  вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника  $OBKC$ , если  $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ , а  $BC = 48$ .

**7В (ЕГЭ 2014).** Около равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  описана окружность. Через точку  $C$  провели прямую, параллельную стороне  $AB$ . Касательная к окружности, проведённая в точке  $B$ , пересекает эту прямую в точке  $K$ .

а) Докажите, что треугольник  $BCK$  — равнобедренный.

б) Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $BCK$ , если  $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$ .

**8В.** Сторона  $BC$  треугольника  $ABC$  равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус  $OA$  делит сторону  $BC$  на два равных отрезка.

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

б) Найдите его боковые стороны.

**9В.** Дан треугольник со сторонами 25, 25 и 48.

а) Докажите, что он тупоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей.

**10В.** В треугольник  $ABC$  вписана окружность. Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны  $BC$  и продолжений двух других сторон.

а) Докажите, что расстояние между точками касания этих окружностей с прямой  $AB$  равно длине стороны  $BC$ .

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ , а радиус меньшей окружности равен  $\sqrt{2}$ .

**11В.** Сторона  $AC$  треугольника  $ABC$  больше стороны  $AB$ . Вписанная в треугольник окружность касается стороны  $BC$  в точке  $M$ , а невписанная — в точке  $N$ .

а) Докажите, что  $MN = AC - AB$ .

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если сумма их радиусов равна 24, а  $MN = 10$ .

**12В.** Стороны треугольника относятся как 2 : 3 : 3.

а) Докажите, что точки касания вписанной и невписанной окружностей треугольника делят его большую сторону на три равных отрезка.

б) Найдите отношение радиусов этих окружностей.

**13В.** Первая окружность с центром  $O$ , вписанная в равнобедренный треугольник  $KLM$ , касается боковой стороны  $KL$  в точке  $B$ , а основания  $ML$  — в точке  $A$ . Вторая окружность с центром  $O_1$  касается основания  $ML$  и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник  $OLO_1$  прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и  $AK = 16$ .

**14В (ЕГЭ 2016).** Точка  $O$  — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $I$  — центр вписанной в него окружности,  $H$  — точка пересечения высот. Известно, что  $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$ .

а) Докажите, что точка  $I$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $BOC$ .

б) Найдите угол  $OIH$ , если  $\angle ABC = 75^\circ$ .

**15В (ЕГЭ 2016).** Окружность касается стороны  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  и делит каждую из сторон  $AB$  и  $BC$  на три равные части.

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника делит сторону  $BC$ .

**16В (ЕГЭ 2017).** В треугольнике  $ABC$  точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  соответственно,  $AH$  — высота,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $\angle BCA = 45^\circ$ .

а) Докажите, что  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $H$  лежат на одной окружности.

б) Найдите  $A_1H$ , если  $BC = 2\sqrt{3}$ .

**17В (ЕГЭ 2017).** Точка  $M$  — середина гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет  $BC$  в точке  $N$ .

а) Докажите, что  $\angle CAN = \angle CMN$ .

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников  $ANB$  и  $CBM$ , если  $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{4}{3}$ .

**18В (ЕГЭ 2017).** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $CH$  из вершины прямого угла. В треугольники  $ACH$  и  $BCH$  вписаны окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно, касающиеся прямой  $CH$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

а) Докажите, что прямые  $AO_1$  и  $CO_2$  перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника  $MO_1NO_2$ , если  $AC = 20$  и  $BC = 15$ .

**19В.** Угол  $BAC$  треугольника  $ABC$  равен  $\alpha$ . Сторона  $BC$  является хордой окружности с центром  $O$  и радиусом  $R$ , проходящей через центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

а) Докажите, что около четырёхугольника  $ABOC$  можно описать окружность.

б) Известно, что в четырёхугольник  $ABOC$  можно вписать окружность. Найдите радиус  $r$  этой окружности, если  $R = 6$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

**20В.** Внеписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на его основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

**21В.** Точка  $I$  — центр окружности  $S_1$ , вписанной в треугольник  $ABC$ , точка  $O$  — центр окружности  $S_2$ , описанной около треугольника  $BIC$ .

а) Докажите, что точка  $O$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

б) Найдите косинус угла  $BAC$ , если радиус описанной окружности треугольника  $ABC$  относится к радиусу окружности  $S_2$  как 3 : 5.



**22В (ЕГЭ 2018).** Точка  $O$  — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ , а  $BH$  — высота этого треугольника.

- Докажите, что углы  $ABH$  и  $CBO$  равны.
- Найдите  $BH$ , если  $AB = 8$ ,  $BC = 9$ ,  $BH = BO$ .

**23В.** Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 20$ ,  $AC = 12$  и  $BC = 16$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно.

- Докажите, что окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается одной из средних линий.
- Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая описана около треугольника  $AMN$ .

**24В.** Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AC = 30$ ,  $BC = 40$  и  $AB = 50$ . Вписанная в него окружность с центром  $I$  касается стороны  $BC$  в точке  $L$ ,  $M$  — середина  $BC$ ,  $AP$  — биссектриса треугольника  $ABC$ ,  $O$  — центр описанной около него окружности.

- Докажите, что  $P$  — середина отрезка  $LM$ .
- Пусть прямые  $OI$  и  $AC$  пересекаются в точке  $K$ , а продолжение биссектрисы  $AP$  пересекает описанную окружность в точке  $Q$ . Найдите площадь четырёхугольника  $OKCQ$ .

**25В.** В треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $O$ , величина угла  $AOC$  составляет  $120^\circ$ .

- Докажите, что около четырёхугольника  $BDOE$  можно описать окружность.
- Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 4$ , а  $\angle BED = 75^\circ$ .

**26В.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $BM$  и  $CN$ . Оказалось, что точки  $B$ ,  $C$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной окружности.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- Пусть  $P$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ . Найдите площадь четырёхугольника  $AMPN$ , если  $MN : BC = 2 : 5$ , а  $BN = 14$ .

**27В.** Окружность проходит через вершины  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  и пересекает  $AB$  и  $AC$  в точках  $C_1$  и  $B_1$  соответственно.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  подобен треугольнику  $AB_1C_1$ .
- Найдите радиус данной окружности, если  $\angle A = 45^\circ$ ,  $B_1C_1 = 6$  и площадь треугольника  $AB_1C_1$  в восемь раз меньше площади четырёхугольника  $B_1CB_1C_1$ .

**28В.** В треугольник  $ABC$  вписана окружность радиуса 4, касающаяся стороны  $AC$  в точке  $M$ , причём  $AM = 8$  и  $CM = 12$ .

- Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
- Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$ .



**29В.** Первая окружность, вписанная в равнобедренный треугольник  $ABC$ , касается боковой стороны  $AB$  в точке  $P$ , а основания  $BC$  — в точке  $M$ . Вторая окружность, касающаяся основания  $BC$  и продолжений боковых сторон, касается прямой  $AB$  в точке  $Q$ .

а) Докажите, что треугольник  $PMQ$  прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если высота треугольника, проведённая из вершины  $A$ , равна 45, а точка  $P$  делит боковую сторону  $AB$  в отношении  $9 : 8$ , считая от вершины  $A$ .

**30В (ЕГЭ 2021).** Окружность с центром  $O$ , построенная на катете  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре, пересекает гипотенузу  $AB$  в точках  $A$  и  $D$ . Касательная, проведённая к этой окружности в точке  $D$ , пересекает катет  $BC$  в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $BM = CM$ .

б) Прямая  $DM$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $P$ , прямая  $OM$  пересекает прямую  $BP$  в точке  $K$ . Найдите  $BK : KP$ , если  $\cos \angle BAC = \frac{4}{5}$ .

### ОТВЕТЫ

1В. 18. 2В.  $\sqrt{5}$ . 3В. 8. 4В. 30. 5В. 40. 6В. 25. 7В. 2. 8В. 30. 9В.  $\frac{575}{14}$ . 10В. 4.  
11В. 26. 12В.  $1 : 4$ . 13В. 24. 14В.  $165^\circ$ . 15В.  $5 : 4$ . 16В. 1. 17В.  $\frac{5}{4}$ . 18В.  $\frac{7}{2}$ .  
19В.  $9 - 3\sqrt{3}$ . 20В.  $2 : 1$ . 21В.  $-\frac{7}{18}$ . 22В. 6. 23В.  $\frac{8\sqrt{21}}{5}$ . 24В. 300. 25В.  $2\sqrt{3}$ .  
26В.  $\frac{70\sqrt{7}}{3}$ . 27В.  $3\sqrt{20 - 6\sqrt{2}}$ . 28В.  $2\sqrt{5}$ . 29В. 40. 30В.  $7 : 25$ .