ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

1) Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

а) да; б) 41; в) 3; 6.

2) Каждое из чисел $a_1, a_2, ..., a_{350}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_{350},$$
$$S_2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{350}^2,$$
$$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{350}^3,$$
$$S_4 = a_1^4 + a_2^4 + ... + a_{350}^4.$$

Известно, что $S_1 = 513$.

а) Найдите S_4, если еще известно, что $S_2 = 1097$, $S_3 = 3243$.

б) Может ли $S_4 = 4547$?

в) Пусть $S_4 = 4745$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

а) 11285; б) нет; в) 905 или 917.

3) Пусть $K(n)$ обозначает сумму квадратов всех цифр натурального числа n.

а) Существует ли такое трёхзначное число n, что $K(n) = 171$?

б) Существует ли такое трёхзначное число n, что $K(n) = 172$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $4K(n) - n$, если n — трёхзначное число?

а) Да; б) нет; в) −582.

4) Можно ли из последовательности $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ выделить арифметическую прогрессию

а) длиной 4

б) длиной 5

в) длиной k, где k — любое натуральное число?

а) Например, годится такая прогрессия: $\frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{24}$.

б) Например, годится такая прогрессия: $\frac{1}{24};\ \frac{1}{30};\ \frac{1}{40};\ \frac{1}{60};\ \frac{1}{120}$.

в) Ясно, что последовательность $\frac{k}{k!};\ \frac{k-1}{k!};\ \dots;\frac{1}{k!}$ является арифметической прогрессией с разностью $-\frac{1}{k!}$. Кроме того, каждый член такой последовательности можно сократить так, чтобы в числителе была единица. Значит, все они являются членами исходной последовательности.

5) Даны две последовательности: 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 и 3, 6, 12. В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону.

а) Найдите этот закон.

б) Найдите все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону).

в) Докажите, что число 21991 после нескольких переходов станет однозначным.

а) удвоенная сумма цифр; б) 18.

6) В последовательности 19752... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности:

а) набор цифр 1234; 3269;

б) вторично набор 1975;

в) набор 8197?

а) нет; б) да; в) да.

7) Целые числа от 1 до n записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Может ли случиться так, что сумма каждого числа и записанного под ним есть точный квадрат

а) при $n=9$,

б) при $n=11$,

в) при $n=1996$.

а) да; б) нет; в) да.

8) Есть набор чисел $p_n=\frac{2n^2+4n-16}{4(n-2)}$, где $p_n, n\in \mathrm{N}$. Число A имеет вид $A=\frac{a_i a_j}{[k]}$ $(A\in \mathrm{N})$, где a_i, a_j — различные числа *p*, *k* — среднее арифметическое всех чисел *p*, $a[x]$ — целая часть от числа *x*.

а) Найти наименьшее возможное и наибольшее возможное число A, если $1 \le n \le 10$.

б) Найдите наименьшее n, при котором число A больше 20.

в) Найдите при каком минимальном n, выполняется равенство $A \cdot \left[k \right] = 40$.

а) 4 и 7; б) 24; в) 12.

9) Рассматривается последовательность 1, 1 / 2, 1 / 3, 1 / 4, ….

а) Существует ли арифметическая прогрессия длины 5 составленная из членов этой последовательности?

б) Можно ли составить арифметическую прогрессию бесконечной длины из этих чисел?

в) Может ли в прогрессии быть 2013 членов?

а) да; б) нет; в) да.

10) Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

а) нет; б) нет; в) да.

11) Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

а) 2, 3; б) нет; в) 8.

12) Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

а) нет; б) нет; в) да.

13) Последовательность $(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots)$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных *n*.

а) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 9a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном *n* может выполняться равенство $3na_{n+1} = (n^2 - 1)a_n$?

а) да; б) нет; в) при $n = 5$.

14) а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

а) нет; б) 2, 3, 4, 5, 6, 7; в) 12.

15) Даны *n* различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?

б) Каково наибольшее значение *n*, если сумма всех данных чисел меньше 1000?

в) Найдите все возможные значения *n*, если сумма всех данных чисел равна 129.

а) да; б) 44; в) 3, 6.

16) Целое число *S* является суммой не менее трех последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

а) Может ли *S* равняться 8?

б) Может ли *S* равняться 1?

в) Найдите все значения, которые может принимать *S*.

а) да; б) нет; в) любые целые значения, кроме −1 и 1.

17) В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2076.

а) может ли в последовательности быть три члена?

б) может ли в последовательности быть четыре члена?

в) может ли в последовательности быть меньше 2076 членов?

а) нет; б) нет; в) да.

18) Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1 эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 19.

а) Может ли число S быть равным 38?

б) Может ли число S быть больше $37,05$?

в) Найдите максимально возможное значение S

а) нет; б) нет; в) $37,05$

19) Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

а) нет; б) нет; в) да.

20) Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

а) нет; б) да; в) 549.

21) Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_7$ ровно три числа делятся на 100?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100?

в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}$?

а) Да, например, прогрессия 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, ...; б) нет; в) 66.

22) Последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из четырёх членов, сумма которых равна 50.

б) Может ли такая последовательность состоять из шести членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 10$?

а) например, 1; 12; 17; 20; б) да; в) 70.

23) На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно *A*, среднее арифметическое чисел во второй группе равно *B*. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

а) например, в первой группе все «5», во второй — все «3» и «4»; в) $4\frac{14}{29}$.

24) На доске написано 24 числа: восемь «5», восемь «4» и восемь «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно *A*, среднее арифметическое чисел во второй группе равно *B*. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 12 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

а) например, в первой группе все «5», во второй — все «3» и «4»; в) $4\frac{11}{23}$.

25) Последовательность $a_1, a_2, ..., a_7$ состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k-го. Известно, что $M_1 = 1$, $M_2 = 2$.

а) приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 1{,}5$.

б) существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 3$?

в) Найдите наибольшее возможное значение M_3.

а) например, 6, 0, 3, 1, 1, 1, 0; б) нет; в) 2,5.

26) Конечная последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из трёхзначных чисел?

а) 2, 4, 5, 5, 4; б) нет; в) 84.

27) Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ состоит из $n \geq 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 5a_{k+1} - 2a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 4$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $a_n = 3a_2 - 2a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 667$?

а) 9, 18, 24, 28; б) нет; в) 2.

28) Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

29) Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ состоит из $n \ge 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \le n-2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 4a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \ge 3$ выполняться равенство $2a_n = 3a_2 - a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 315$?

а) например, последовательность $1, 89, 109, 118, 121$; б) нет; в) 3.

30) Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1 b_1 + a_3 b_3 = 3a_2 b_2$?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1 b_1 + 2a_4 b_4 = 3a_3 b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение $a_3 b_3$, если $a_1 b_1 + 2a_4 b_4 \le 300$?

а) да, например, $1, 3, 5, ...$ и $1, 4, 7, ...$ соответственно; б) нет; в) 98.

31) Последовательность $a_1, a_2, ..., a_6$ состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме *k*-го. Известно, что $M_1 = 7$, $M_2 = 6$.

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 6{,}4$.

б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 5$?

в) Найдите наименьшее возможное значение M_3.

а) например, 4; 9; 7; 7; 7; 5; б) нет; в) 5,2.

32) Последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из натуральных чисел, причем $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных *n*.

а) Может ли выполняться равенство $4a_5 = 7a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном *n* может выполняться равенство $6n\,a_{n+1} = (n^2 + 24)a_n$?

а) да; б) нет; в) при $n = 5$

33) Первый член конечной геометрической прогрессии, состоящей из трёхзначных натуральных чисел, равен 128. Известно, что в прогрессии не меньше трёх чисел.

а) Может ли число 686 являться членом такой прогрессии?

б) Может ли число 496 являться членом такой прогрессии?

в) Какое наибольшее число может являться членом такой прогрессии?

а) да; б) нет; в) 972.