

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

10	-	0	,	8															
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Найдите корень уравнения

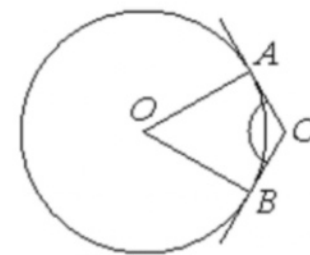
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-6} = 81.$$

Ответ: _____.

2 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,6. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,45. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Ответ: _____.

3 Через концы А и В дуги окружности с центром О проведены касательные АС и ВС. Меньшая дуга АВ равна 58°. Найдите угол АСВ. Ответ дайте в градусах.

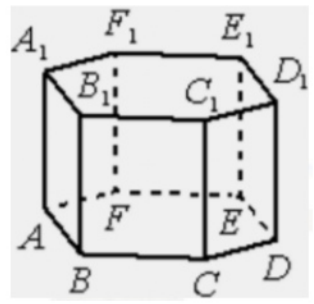


Ответ: _____.



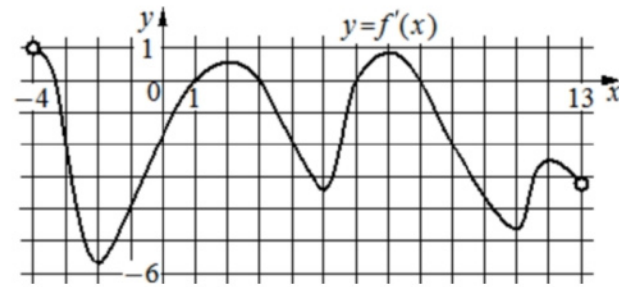
4 Найдите $16 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,5$.
 Ответ: _____.

5 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 3, найдите угол между прямыми CD и $E_1 F_1$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 10$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

7 Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 267$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1-v/c}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 3 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ выразите в м/с.

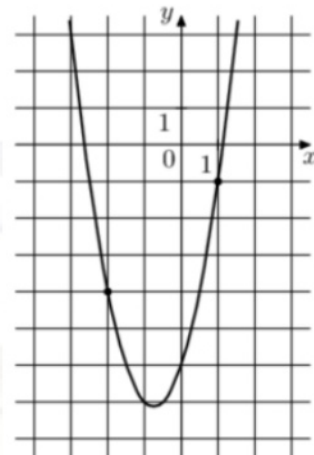
Ответ: _____.

8 Моторная лодка прошла против течения реки 252 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 16 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.



9 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx - 6$. Найдите $f(-6)$.



Ответ: _____.

10 В волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,7 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 8 июля погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 11 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Ответ: _____.

11 Найдите наибольшее значение функции $y = (x - 27) \cdot e^{28-x}$ на отрезке $[23; 40]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$.

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

14 Решите неравенство

$$\log_2(4x^2 - 1) - \log_2 x \leq \log_2 \left(5x + \frac{9}{x} - 11 \right).$$

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма выплат составит 930 тыс. рублей?



16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . На катете AC взята точка M . Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N .

- а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.
б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM:MC = 1:3$.

17 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$3 \sin x + \cos x = a$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

18 На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

- а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?
б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?
в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k ?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	0,4
2	0,27
3	122
4	-8
5	60
6	5
7	3,5
8	2
9	48
10	0,468
11	1
12	а) 2; 5 б) 2
13	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$
14	$\left(\frac{1}{2}; 1\right] \cup [10; +\infty)$
15	16
16	7
17	$[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$
18	а) нет б) да в) 6

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 а) Решите уравнение

$$x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$.

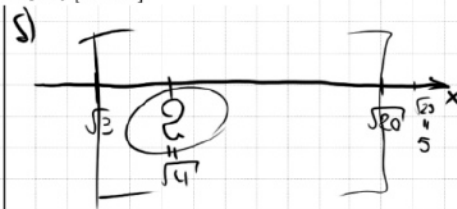
а)

$$\begin{cases} x+1 = 3\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x-1} = \frac{x+1}{3} \\ x-1 = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 \quad | \cdot 9 \\ \frac{x-1}{3} \geq 0 \quad | \cdot 3 \\ 9x-9 = x^2+2x+1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=5 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Ответ: а) 2 ; 5
б) 2

Источники:
Основная волна (Резерв) 2018

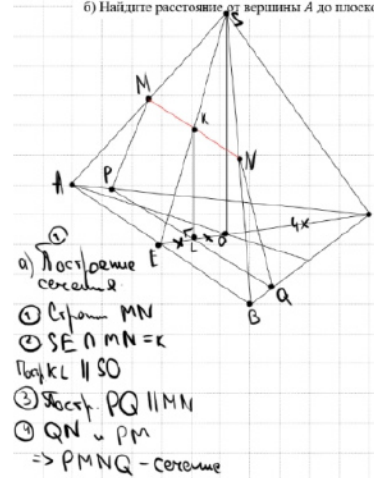


13

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

Источники:
ЕЭП (старый базис)
ЕЭП (новый базис)
Январь 2019 (36 лет)
Основная волна (Резерв) 2015



- а) Построение сечения
1) Сторона MN
2) $SE \cap MN = K$
Плоск. $KL \parallel SO$
3) Постр. $PQ \parallel MN$
4) $QN \sim PM$
 $\Rightarrow PMNQ$ – сечение

Ответ: $\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

1) Пусть $EL = x$
Тогда $LO = x$ (т.к. KL – сечение α SEO)

2) CE – медиана \Rightarrow
 $\frac{CO}{EO} = \frac{2}{1}$ (по св. медианы)
 $\Rightarrow CO = 4x$
 $EO = 2x$
 $\Rightarrow \frac{CL}{EL} = \frac{5x}{x} = \frac{5}{1}$

3) $AB \parallel d$ (т.к. $AB \parallel MN$)
 $\Rightarrow P(A; d) = P(E; d)$
 $EL \perp KL \Rightarrow EL \perp d$
 $EL \perp PQ$

$CE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 30 = 15\sqrt{3}$
 $EL = \frac{1}{6} \cdot 15\sqrt{3} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

14 Задание с развернутым ответом

Решите неравенство $\log_2(4x^2 - 1) - \log_2 x \leq \log_2(5x + \frac{9}{x} - 11)$.

Источники: ГЭИ (новый банк) Осенняя волна 2018 Янвекто 2019 (36 стр)

№ пример: 5120

① $\frac{4x^2 - 1}{x} \leq 5x + \frac{9}{x} - 11$
 ② $4x^2 - 1 > 0$
 $x > 0$
 ③ $5x + \frac{9}{x} - 11 > 0$

① $4x - \frac{1}{x} - 5x - \frac{9}{x} + 11 \leq 0$
 $-x - \frac{10}{x} + 11 \leq 0$
 $-\frac{x^2 + 11x - 10}{x} \leq 0$
 $\frac{x^2 - 11x + 10}{x} \geq 0$

② $(2x - 1)(2x + 1) > 0$

③ $x > 0$
 ④ $\frac{5x^2 - 11x + 9}{x} > 0$

Найдём пересечение

ОТВЕТ: $(\frac{1}{2}; 1] \cup [10; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма выплат составит 930 тыс. рублей?

Источники: Осенняя волна 2021

Пусть $(1 + \frac{r}{100}) = b$

Дата	Сумма долга	Сумма выплаты	Сумма долга
июль 2025	600	0	600
январь 2026	600b	345	255
июль 2026	500	29	471
январь 2027	500b	230	271
июль 2027	400	30	370
январь 2028	400b	100	300
июль 2028	300	31	269
январь 2029	300b	115	154
июль 2029	200	0	200
январь 2030	200b	145	55
июль 2030	100	0	100
январь 2031	100b	130	30
июль 2031	0	0	0

О.С.В. = 930

$600b - 500 + 500b - 400 + 400b - 300 + 145 + 130 + 115 = 930$

$1500 \cdot b = 930 - 390 + 1200$
 $1500 \cdot b = 1740$
 $b = \frac{174}{150} = \frac{58}{50} = \frac{116}{100} = 1,16 = 1 + \frac{r}{100}$
 $r = 16$

ОТВЕТ: 16

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . На катете AC взята точка M . Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N .

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.
 б) Найдите площадь четырехугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM : MC = 1 : 3$.

Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 ЕГЭ (новый банк)
 Ященко 2021 (16 вар)
 Ященко 2020 (16 вар)
 Ященко 2019 (16 вар)
 Ященко 2018

Ответ: 7

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $3 \sin x + \cos x = a$ имеет единственное решение на отрезке $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$.

Источники:
 Личные материалы (Решар) 2019
 Пробный ЕГЭ 2018

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



18

Задание с развернутым ответом

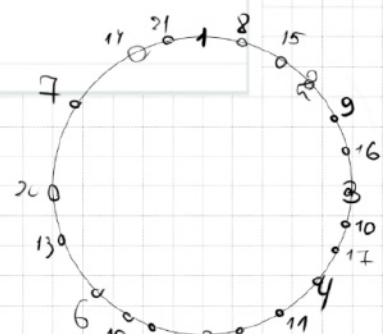
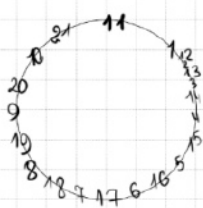
На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.
 а) Можно ли все полученные разности быть не меньше 11?
 б) Можно ли все полученные разности быть не меньше 10?
 в) Поимам полученные разности, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего натурального числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k ?

Источники:

ФРП (новый банк)
 Сентябрь 2018
 Сентябрь 2015
 Досрочная волна 2014

1 Номер: 440 ★

а) Нет, т.к. для 11 нет подходящих соседних чисел.
 б) Да



- ① Как поставить 1-7? $\Rightarrow k < 7$
 - через 2 шага (8 для максимизации k)
- ② Куда поставить 8?
 справа от 1
 \Rightarrow все разности ≥ 6
- ③ Куда поставить 9-14?
- ④ Куда поставить 15-21?
 $\Rightarrow k = 6$
 В приведенном примере все разности ≥ 6 .

ОТВЕТ: а) нет
 б) да
 в)

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособринадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

- 1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;
- 2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.