

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

0	-	0	,	8															
---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

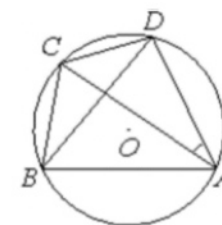
Справочные материалы

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

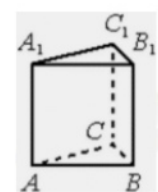
- 1** Решите уравнение
 $\log_{x-2} 16 = 2$.
 Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.
 Ответ: _____.
- 2** Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже $36,8^\circ\text{C}$, равна $0,89$. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется $36,8^\circ\text{C}$ или выше.
 Ответ: _____.
- 3** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 82° , угол ABD равен 47° . Найдите угол CAD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

4 Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{51}}{10}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.
 Ответ: _____.

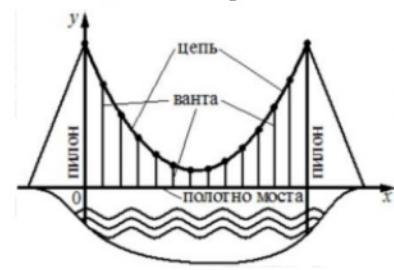
5 В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1 .



Ответ: _____.

6 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 27$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.
 Ответ: _____.

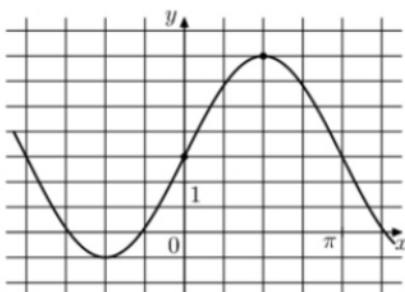
7 На рисунке изображена схема моста. Вертикальные *пилоны* связаны провисающей *цепью*. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают *полотно* моста, называются *вантами*.
 Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задаётся формулой $y = 0,0029x^2 - 0,53x + 28$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 90 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



Ответ: _____.

8 Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 50 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 5 часов позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.
 Ответ: _____.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите b .



Ответ: _____.

10 Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Ответ: _____.

11 Найдите точку максимума функции $y = (2x - 1) \cos x - 2 \sin x + 5$ принадлежащую промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\log_5(2 - x) = \log_{25} x^4.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8 \right].$$

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

14 Решите неравенство

$$\log_2^2(16 + 6x - x^2) + 10 \log_{0,5}(16 + 6x - x^2) + 24 > 0.$$

15 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1100 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 30-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1503 тысячи рублей?

16 В треугольнике ABC угол ABC тупой, H – точка пересечения продолжений высот, угол AHC равен 60° .

- Докажите, что угол ABC равен 120° .
- Найдите BH , если $AB = 7$, $BC = 8$.

17 Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 2x^2 - x \log_2(b - 1) + 4 = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

18 На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

- Может ли на доске быть 5 чисел?
- Может ли на доске быть 6 чисел?
- Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	6
2	0,11
3	35
4	-0,7
5	45
6	6
7	3,79
8	10
9	1,5
10	0,46
11	0,5
12	а) 1; -2 б) -2
13	$8 + 2\sqrt{2}$
14	$(-2; 0) \cup (6; 8)$
15	200 тыс.
16	$\frac{13\sqrt{3}}{3}$
17	$\left(1; \frac{33}{32}\right] \cup \{129\} \cup (1025; +\infty)$
18	а) да, 8 9 10 11 12 или 7 9 10 11 12 б) нет в) 37

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

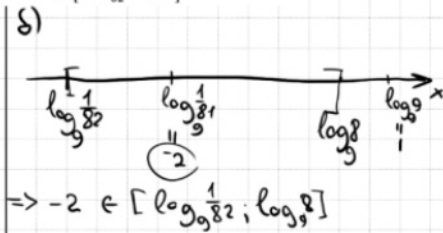
12 а) Решите уравнение

$$\log_5(2-x) = \log_{25} x^4.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8]$.

а) $\log_5(2-x) = \log_{5^2}(x^2)^2$

$$\begin{cases} 2-x = x^2 \\ 2-x > 0 \\ x^4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$



Источники:
Дополнительные материалы (Решу) 2019
Основная волна 2014

ОТВЕТ: а) 1, -2
б) -2

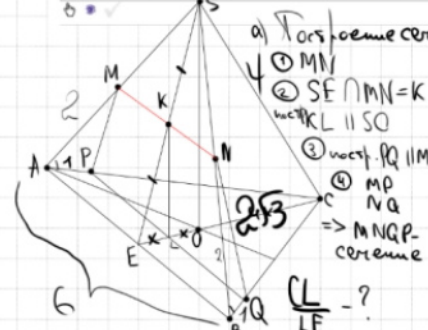
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

13

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .



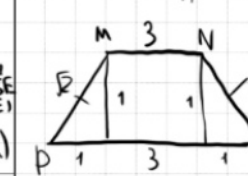
а) Пусть KL — сечение. $\Rightarrow MN \parallel KL$. Пусть $KL \parallel SO$. Пусть $EL = LO = x$. $EO = \frac{2}{3} \Rightarrow CO = 4x$, $EO = 2x$ (по св-ву медиан)

ОТВЕТ: $8 + 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{CL}{LE} = \frac{5x}{x} = \frac{5}{1}$

б) $MN = \frac{1}{2} AB = 3$
 $PQ = \frac{5}{6} AB = 5$ (т.к. $\Delta CPQ \sim \Delta ABC$ по 2 углам, $\angle C = 60^\circ$)

$\Delta APM = \Delta BQN$ по св-ву $\Rightarrow PM = NQ$
 $\Rightarrow MNPQR$ — п/с трапеции.



$KL = \frac{1}{2} SO$
 $CO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 2\sqrt{3}$
 $SO = \sqrt{16 - 12} = 2$
 $KL = 1$
 $P = 3 + 5 + 2\sqrt{2}$

Источники:
ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Материалы для экспертов ЕГЭ

КАК СТРОИТЬ СЕЧЕНИЕ
Проводим прямые через две точки, лежащие на одной грани

Плоскость сечения пересекает параллельные грани по параллельным прямым

Метод следов (построение вспомогательной прямой, являющейся линией пересечения секущей плоскости с плоскостью грани (Фигуры) $K = \frac{1}{2}$)

Если секущая плоскость проходит через прямую, параллельную плоскости, то она пересекает эту плоскость по прямой, параллельной начальной прямой



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1

16 В треугольнике ABC угол ABC тупой, H – точка пересечения продолжений высот, угол AHC равен 60° .

а) Докажите, что угол ABC равен 120° .
 б) Найдите BH , если $AB = 7$, $BC = 8$.

Источники:
 ГЭИ (новый банк)
 Досрочная волна 2018

а) $\angle BDE = 360 - 90 - 90 - 60 = 120$
 $\angle ABC = 120$
 (вертикальные)

б) $\angle ABD = 30$
 $BD = \frac{1}{2} AB = 3,5$
 $BE = \frac{1}{2} BC = 4$
 т.к. углы ABD и CBE равны 30° и 60° соответственно

② $\triangle AHE$:
 $\angle HAE = 30^\circ$
 $AE = 11$
 $\tan 30^\circ = \frac{HE}{AE} = \frac{HE}{11}$
 $HE = \frac{11}{\sqrt{3}}$

③ $\triangle BEH$:
 $BE = 4$
 $HE = \frac{11}{\sqrt{3}}$
 $BH = \sqrt{\left(\frac{121}{3}\right) + \frac{16}{1}} = \sqrt{\frac{169}{3}} = \frac{13}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{13}{\sqrt{3}}$

17 Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение $x^3 + 2x^2 - x \log_2(b-1) + 4 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

Источники:
 Слайдо 2018
 Досрочная волна 2018

Пусть $\log_2(b-1) = a$
 $x^3 + 2x^2 - x \cdot a + 4 = 0 \quad | :x$
 $x^2 + 2x - a + \frac{4}{x} = 0$
 Заметим, что $x=0$ не экв. реш.
 Ур-е мы ищем корни

Решим графически:
 Пусть $f(x) = x^2 + 2x + \frac{4}{x}$
 Исследуем функцию на монотонность
 $f'(x) = 2x + 2 - 4 \cdot x^{-2}$
 $2x + 2 - \frac{4}{x^2} = 0$
 $2x^3 + 2x^2 - 4 = 0$
 $x^3 + x^2 - 2 = 0$

Заметим, что при подстановке $x=1$ числитель 0.
 $\frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 + 2x + 2} = 0$
 $\frac{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} = 0$
 $\Rightarrow x=1$ – точка экстремума

График функции $f(x)$ на отрезке $[-1; 2]$ имеет вид:

x	-1	-0,5	0,5	1	1,5	2
y	-5	-8,75	9,25	7		10

Ответ: $\left(1, \frac{33}{32}\right] \cup \{129\} \cup (1025, +\infty)$

1 решение будет при
 $\begin{cases} a \leq -5 \\ a = 7 \\ a > 10 \end{cases}$

$\log_2(b-1) \leq -5$
 $0 < b-1 \leq \frac{1}{32}$
 $1 < b \leq \frac{33}{32}$

$\log_2(b-1) = 7$
 $b-1 = 128$
 $b = 129$

$\log_2(b-1) > 10$
 $b-1 > 1024$
 $b > 1025$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

– обоснованное решение пункта a ; – обоснованное решение пункта b ; – искомая оценка в пункте c ; – пример в пункте e , обеспечивающий точность предыдущей оценки	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрназора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

18 На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?
 б) Может ли на доске быть 6 чисел?
 в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Источники:
 1) ЕГЭ (старый банк)
 2) Демо-вариант 2017
 3) Резерв 2014
 4) Всероссийский экзамен 2022

а) $\begin{matrix} 7 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix}$

б) $\begin{matrix} 7 & 9 & - & - \\ 7 & 9 & - & - \end{matrix}$

в) Пусть a, b, c, d, e, f – числа на доске в порядке возр.

$a \geq 9, c \leq 11, f$

$b \geq 9$ и/или не выполняется усл. задачи
 $c \leq 11$

$\Rightarrow c = 10$
 $10 \cdot d = 10$
 числа на доске д.б. различные

а) 9
 б) нет
 в) 31

7 и 9 – это минимально возможная комбинация первых двух чисел, удовл. усл.

в) Возможны наименьшие возр. ост. числа

7 9 10 11 – минимально возможная комбинация чисел

31

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов:	1