ПРИМЕНЕНИЕ МОНОТОННОСТИ И ОГРАНИЧЕННОСТИ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

В этом разделе будут рассмотрены уравнения и неравенства с параметрами (и не только), решение которых будет опираться на свойства элементарных функций, изучаемых в школьном курсе математики, такие как монотонность и ограниченность.

МОНОТОННОСТЬ

Определение 1: Функция называется возрастающей на интервале $(a;b)$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. для любой пары $x_1, x_2 \in (a;b)$ таких, что $x_1 > x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Определение 2: Функция называется убывающей на интервале $(a;b)$, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. для любой пары $x_1, x_2 \in (a;b)$ таких, что $x_1 > x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 3: Функция называется монотонной на интервале, если она на этом интервале или возрастает, или убывает.

Необходимые условия возрастания (убывания) функции: если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$, то $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$ при $x \in (a;b)$.

Достаточные условия монотонности функции $f(x)$: если $f'(x) > 0$ на интервале $(a;b)$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале; если $f'(x) < 0$ – убывает.

Утверждение 1. Если функция $y = f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x) = A$ (где A – любое действительное число) имеет не более одного корня.

Утверждение 2. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

С помощью утверждений 1 и 2 можно обосновать единственность решения уравнения в тех случаях, когда решить его стандартными способами не представляется возможным, но при этом удается подобрать корень уравнения, который, как правило, является целым числом. При этом надо учитывать, что решение уравнения «методом подбора» не будет засчитано при проверке без обоснования того, что уравнение не имеет других корней. Такое обоснование часто удается сделать, опираясь на свойства монотонности функций.

Пример 1. Решить уравнение $\log_3 x = 4 - x$.

Решение. Подбором находим, что заданное уравнение имеет корень $x = 3$. Так как в области определения уравнения, т.е. на интервале $(0; +\infty)$, логарифмическая функция $y = \log_3 x$ возрастает (основание $3 > 1$), а функция $y = 4 - x$ убывает (прямая с отрицательным угловым коэффициентом), то других корней уравнение не имеет. Следовательно, $x = 3$ – единственный корень уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $\log_3\left(5+\sqrt{x}\right) = \log_4 x$.

Решение. Положим $t = \log_4 x$. Тогда $x = 4^t$, $\sqrt{x} = 2^t$, и заданное уравнение можно переписать в виде $\log_3\left(5+2^t\right) = t$, откуда получаем показательное уравнение $3^t = 2^t + 5$. Это уравнение имеет очевидный корень $t = 2$, но утверждать, как в предыдущем примере, что это единственный корень уравнения, нельзя, ибо как левая, так и правая часть уравнения – возрастающая функция. Но если обе части уравнения разделить на 2^t, то получим:

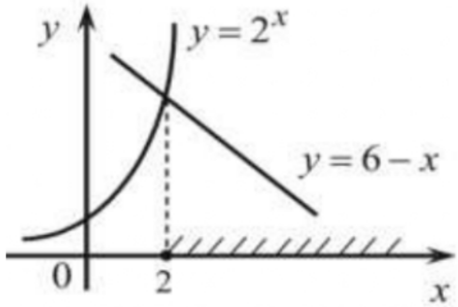
$$\left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 + 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Теперь левая часть уравнения, т.е. показательная функция $y = \left(\frac{3}{2}\right)^t$, возрастает (основание $\frac{3}{2} > 1$), а правая часть уравнения, т.е. показательная функция $y = 1 + 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$, убывает (основание $\frac{1}{2} < 1$). Значит, $t = 2$ – единственный корень уравнения.

Поскольку $t = \log_4 x$, то из уравнения $\log_4 x = 2$ находим $x = 16$ – единственный корень заданного уравнения.

Пример 3. Решить неравенство $2^x \ge 6 - x$.

Решение. Здесь при $x = 2$ левая и правая части равны. Так как в области определения неравенства, т.е. при $x \in R$, показательная функция $y = 2^x$ возрастает (основание $2 > 1$), а функция $y = 6 - x$ убывает (прямая с отрицательным угловым коэффициентом), то неравенству удовлетворяют значения x, которые больше или равны 2 (см. рис.). Следовательно, решение данного неравенства имеет вид $x \in [2; +\infty)$.



<u>Пример 4.</u> Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция

$$y=9+7x-3\left|ax+2\right|+\left|ax+5\right|+\left|x+1\right|$$

является неубывающей на всей числовой прямой.

Р е ш е н и е . Данная функция определена на всей числовой прямой и при любом значении параметра a является кусочно-линейной. Точки -1, $-\dfrac{2}{a}$, $-\dfrac{5}{a}$ разбивают числовую прямую на промежутки, на каждом из которых функция является линейной. Рассмотрим случай $a<0$. Тогда $-1<-\dfrac{2}{a}<-\dfrac{5}{a}$. При раскрытие модулей получаем:

если $x<-1$, то $y=9+7x-3ax-6+ax+5-x-1=(6-2a)x+7$;

если $-1\le x<-\dfrac{2}{a}$, то $y=9+7x-3ax-6+ax+5+x+1=(8-2a)x+9$;

если $-\dfrac{2}{a}\le x<-\dfrac{5}{a}$, то $y=9+7x+3ax+6+ax+5+x+1=(8+4a)x+21$;

если $x\ge-\dfrac{5}{a}$, то $y=9+7x+3ax+6-ax-5+x+1=(8+2a)x+11$.

Для того чтобы функция не убывала, необходимо и достаточно, чтобы все полученные значения угловых коэффициентов прямых были неотрицательными. Следовательно,

$$\begin{cases} a<0, \\ 6-2a\ge0, \\ 8-2a\ge0, \\ 8+4a\ge0, \\ 8+2a\ge0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -2\le a<0.$$

Отсюда получаем наименьшее значение параметра, равное -2. Так как по условию задачи нужно найти наименьшее значение a, то случай $a\ge0$ рассматривать не нужно.

<u>Пример 5.</u> Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$27x^6+(a-2x)^3=2^{2x-a}-8^{x^2}$$

имеет хотя бы один корень.

Р е ш е н и е . Преобразуем уравнение следующим образом: $\left(3x^2\right)^3+2^{3x^2}=(2x-a)^3+2^{2x-a}$. Рассмотрим функцию $f(t)=t^3+2^t$, которая является монотонно возрастающей на всей числовой прямой (как сумма двух возрастающих функций). В силу возрастания функции $y=f(t)$ равенство $f(a)=f(b)$ возможно только в том случае, если $a=b$. В нашем примере

$a=3x^2$, $b=2x-a$. Следовательно, исходное уравнение можно записать в виде: $3x^2=2x-a$ или $3x^2-2x+a=0$. Для того чтобы последнее уравнение имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно, его дискриминант был неотрицателен: $D=4-12a\ge 0$, откуда $a\le\frac{1}{3}$.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ

Задачи этого раздела составляют уравнения и неравенства, решение которых будет основано на использование свойств ограниченных функций, прежде всего за счет множества значений функций. Такие задачи, как и задачи на монотонность функций, обычно не решаются стандартными способами и ключом к решению, как правило, является исследование множества значений левой и правой частей уравнения или неравенства.

Напомним множество значений основных элементарных функций:

1) прямая $y=kx+b$: $y\in R$, если $k\ne 0$;

2) парабола $y=ax^2+bx+c$: $y\in\left[-\frac{\sqrt{D}}{4a};\infty\right)$, если $a>0$ и $y\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{D}}{4a}\right]$, если $a<0$;

3) $y=\sqrt[2n]{x}$, $y=|x|$: $y\in[0;\infty)$;

4) $y=\sin x$, $y=\cos x$: $y\in[-1;1]$;

5) $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$, $y=\log_a x$: $y\in R$;

6) $y=a\sin x+b\cos x$: $y\in\left[-\sqrt{a^2+b^2};\sqrt{a^2+b^2}\right]$;

7) $y=a^x$: $y\in(0;\infty)$;

8) $y=\arcsin x$: $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

9) $y=\arccos x$: $y\in[0;\pi]$;

10) $y=\operatorname{arctg}x$: $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

11) $y=\operatorname{arcctg}x$: $y\in(0;\pi)$;

12) $y=x+\frac{1}{x}$: $y\in[2;\infty)$, если $x>0$ и $y\in(-\infty;-2]$, если $x<0$;

13) $a^2+b^2\ge 2ab$ для любых действительных a и b, причем $a^2+b^2=2ab$, если $a=b$;

14) $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ для любых неотрицательных a и b, причем $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$, если $a=b$.

Утверждение 3. Если функция $f(x)$ ограничена сверху, причем $\max f(x)=A$, функция $g(x)$ ограничена снизу, причем $\min g(x)=A$, то уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A. \end{cases}$

Утверждение 4. Если функция $f(x)$ ограничена сверху, причем $\max f(x)=A$, функция $g(x)$ ограничена снизу, причем $\min g(x)=A$, то неравенство $f(x)\geq g(x)$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A. \end{cases}$

Утверждения 3 и 4 будут справедливы, если функции *f* и *g* будут функциями не одного, а разных аргументов.

Пример 6. Решить уравнение $2\cos\frac{x}{3}=5^x+5^{-x}$.

Р е ш е н и е . Положим $5^x=t$. Тогда правая часть исходного уравнения примет вид $t+\frac{1}{t}$. Воспользуемся тем, что $t+\frac{1}{t}\geq 2$, если $t>0$. В то же время справедливо неравенство $2\cos\frac{x}{3}\leq 2$. Значит, исходное уравнение, согласно утверждению 3, сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} 5^x+5^{-x}=2, \\ 2\cos\frac{x}{3}=2. \end{cases}$$

Решая первое уравнение системы с помощью подстановки $5^x=t,\quad t>0$, находим $x=0$. Поскольку это значение удовлетворяет и второму уравнению системы, то $x=0$ – решение системы, а тем самым и корень исходного уравнения.

Пример 7. Решить уравнение $\cos x+4\sin\frac{x}{2}=6-\sin 10x$.

Р е ш е н и е . Так как $\cos x\leq 1$, $\sin\frac{x}{2}\leq 1$, то $\cos x+4\sin\frac{x}{2}\leq 5$. Более того, $\cos x+4\sin\frac{x}{2}<5$. В самом деле, рассмотрим уравнение $\cos x+4\sin\frac{x}{2}=5$. Такое равенство может иметь место тогда и только тогда, когда $\cos x=1$ и $\sin\frac{x}{2}=1$, что невозможно, ибо $\cos x=1$ при $x=2\pi n,\ n\in Z$, а при этих значениях имеем:

$$\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{2\pi n}{2}=\sin\pi n=0.$$

Следовательно, $\cos x + 4\sin\frac{x}{2} < 5$. В то же время правая часть исходного уравнения удовлетворяет неравенству $6 - \sin 10x \geq 5$ (поскольку $-1 \leq \sin 10x \leq 1$). Таким образом, можно сделать вывод, что исходное уравнение не имеет решений.

Пример 8. Решить уравнение $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$.

Р е ш е н и е . Поскольку $\cos^7 x \leq \cos^2 x$ и $\sin^4 x \leq \sin^2 x$, то левая часть данного уравнения не превосходит единицы и равна единице только в случае, когда в обоих написанных нестрогих неравенствах имеет место равенство, т.е. выполняется система уравнений

$$\begin{cases} \cos^7 x = \cos^2 x, \\ \sin^4 x = \sin^2 x. \end{cases}$$

Первое уравнение системы выполняется при $\cos x = 0$ и при $\cos x = 1$. При этих значениях x второе уравнение также выполняется: если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$, а $\sin^2 x = 1$, а если $\cos x = 1$, то $\sin x = 0$. Поэтому решениями системы, а вместе с ней и решениями исходного уравнения, будут $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $x = 2\pi n, \quad n \in Z$.

Пример 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 13|x| + 5\sqrt{4x^2 + 9} = 3a + 3|4x - 3a|$$

имеет хотя бы один корень.

Р е ш е н и е . Перепишем уравнение в виде:

$$a^2 + 5\sqrt{4x^2 + 9} = 3a + 3|4x - 3a| - 13|x|$$

и рассмотрим функции $f(x) = a^2 + 5\sqrt{4x^2 + 9}$ и $g(x) = 3a + 3|4x - 3a| - 13|x|$. Функция $f(x)$ является четной и при $x < 0$ – убывает, а при $x > 0$ – возрастает, следовательно, $x = 0$ является точкой минимума для функции $f(x)$. Функция $g(x)$ при $x < 0$ примет вид $g(x) = 3a + 3|4x - 3a| + 13x$ и будет возрастать независимо от того с каким знаком раскроется выражение $3|4x - 3a|$, а при $x > 0$ $g(x) = 3a + 3|4x - 3a| - 13x$ и будет убывать опять же независимо от того как раскроется выражение $3|4x - 3a|$, следовательно, $x = 0$ является точкой максимума для функции $g(x)$. Поскольку наименьшее значение функции $f(x)$ и наибольшее значение функции $g(x)$ достигается в одной и той же точке $x=0$, то исходной уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда $f(0)\le g(0)$, то есть

$$a^2+15\le 3a+3|3a|.$$

При $a>0$ получаем $a^2-12a+15\le 0 \Leftrightarrow a\in\left[6-\sqrt{21};6+\sqrt{21}\right]$.

При $a<0$ получаем $a^2+6a+15\le 0 \Leftrightarrow D<0 \Leftrightarrow \varnothing$.

Таким образом, исходное уравнение имеет решения при $a\in\left[6-\sqrt{21};6+\sqrt{21}\right]$.

Задачи для самостоятельного решения разбиты на два уровня А и В. Уровень А содержит уравнения и неравенства, которые не решаются стандартными методами, а для решения которых необходимо использовать монотонность и ограниченность функций. Уровень В это задачи с параметрами для решения которых, опять же, используются монотонность и ограниченность функций. Задачи уровня В по сложности максимально приближены к 17 заданиям ЕГЭ по профильной математике.

Уровень А

Решите уравнения (**1А – 45А**):

1А. $3^x+4^x=5^x.$

2А. $3^x=4-x.$

3А. $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{7}{5}=2^x.$

4А. $\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x.$

5А. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x.$

6А. $x\cdot 2^x=x(3-x)+2\left(2^x-1\right).$

7А. $x^x=10^{x-x^2}\quad (x>0).$

8А. $x^{\lg^2 x}+10^{\lg x}=20.$

9А. $2\cos\pi x=2x-1.$

10А. $\cos\pi x=x^2-4x+5.$

11А. $3\arcsin x+\pi x-\pi=0.$

12А. $3\arccos x-\pi x-\frac{\pi}{2}=0.$

13А. $2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2^x+2^{-x}.$

14А. $3^{\left|\sin\sqrt{x}\right|}=\left|\cos x\right|.$

15А. $2^{-\cos x}=\log_\pi x+\log_x\pi.$

16А. $5^{\left|1-4x^2\right|}=\sin\pi x.$

17А. $3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}=5+4\sin 2\pi x.$

18А. $2^{1-|x-1|}=x^2-2x+3.$

19А. $2^{1-|4x-1|}=\operatorname{tg}\pi x+\operatorname{ctg}\pi x.$

20А. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.$

21А. $\sqrt{2+\cos^2 2x} = \sin 3x - \cos 3x.$

22А. $\log_3\left(8+2x-x^2\right) = 2^{x-1} + 2^{1-x}.$

23А. $\log_3\left(3+\left|\sin x\right|\right) = 2 - 2^{|x|}.$

24А. $\log_2\left(3-\left|\cos x\right|\right) = 2^{-|\pi - x|}.$

25А. $\log_3\left(\frac{1}{3} - \left|\frac{3\pi}{2} - x\right|\right) = \sin x.$

26А. $\log_3\left(4 - \left|\cos\frac{4x}{3}\right|\right) = \sin x.$

27А. $\sin\frac{\pi}{x^2+6x+13} = \frac{\log_3\left|x\right| + \log_{|x|} 3}{2\sqrt{2}}.$

28А. $\cos\frac{16\pi}{16x^2-8x+49} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \pi x + \operatorname{ctg}^2 \pi x}.$

29А. $\arcsin\left(x^2-2x+2\right) = \frac{\pi x}{2}.$

30А. $\arccos\left(6x - x^2 - 10\right) = \frac{\pi x}{3}.$

31А. $x^2 + 2x\sin\left(xy\right) + 1 = 0.$

32А. $2\left(x^4 - 2x^2 + 3\right)\left(y^4 - 3y^2 + 4\right) = 7.$

33А. $\left(x^2 - 2x + 3\right)\left(y^2 + 6y + 12\right) = 6.$

34А. $\operatorname{tg}^2 2x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x + 3 = -\operatorname{ctg}^2\left(4y - \frac{\pi}{6}\right).$

35А. $\sin^2 \pi x + \log_2^2\left(y^2 - 2y + 1\right) = 0.$

36А. $\cos^2 x + \cos x \cos y + \cos^2 y = 0.$

37А. $2\sqrt{2}\left(\sin x + \cos x\right)\cos y = 3 + \cos 2y.$

38А. $\log_2^2\left(x+y\right) - 2\sin\frac{\pi xy}{2}\log_2\left(x+y\right) + \left|y-1\right| = -1.$

39А. $4^{\sin x} - 2^{1+\sin x}\cos xy + 2^{|y|} = 0.$

40А. $2^{1-x^2} + 2^{x^2-1} = 2\sin\frac{\pi y}{2}.$

41А. $1 - 2x - x^2 = \operatorname{tg}^2\left(x+y\right) + \operatorname{ctg}^2\left(x+y\right).$

42А. $\log_2\left(2 + 2\sin\left(x+y\right) - \cos^2\left(x+y\right)\right) = 4^x - 2^{x+1} + 3.$

43А. $\log_3\left|\pi x\right| + \log_{|\pi x|} 3 = \frac{2}{\sin^2\left(x+y\right) - 2\sin\left(x+y\right) + 2}.$

44А. $4\sin^2 xy + 4\sin xy + 3 = \frac{4}{\ln\left|y\right| + \log_{|y|} e}.$

45А. $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2 2y\right)\left(3 + \sin 3z\right) = 4.$

Решите неравенства (**46А – 56А**):

46А. $\cos^2(x+1)\lg\left(9-2x-x^2\right)\ge 1.$

47А. $\left(4x-x^2-3\right)\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\ge 1.$

48А. $\cos\left(\pi\left(x+\frac{1}{2}\sin\pi x\right)\right)+\left(\sin^2\pi x+\sin\pi x\right)^2\le -1.$

49А. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\left(2^x+\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right)+\left|3^x+3^{1-x}-4\right|\le -1.$

50А. $x+y^2+\sqrt{x-y^2-1}\le 1.$

51А. $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\ge 0.$

52А. $\left(3-\cos^2 x-2\sin x\right)\left(\lg^2 y+2\lg y+4\right)\le 3.$

53А. $\lg(1+y)+\arcsin\left(2^{|x|}+y\right)\ge\frac{\pi}{2}.$

54А. $\pi y+2\arcsin\left(x^2+y\right)\ge 2\pi.$

55А. $\arccos\left(x+y^2\right)-\log_2(1+x)\le -1.$

56А. $2^y-2\cos x+\sqrt{y-x^2-1}\le 0.$

ОТВЕТЫ

1А. $x=2.$ **2А.** $x=1.$ **3А.** $x=1.$ **4А.** $x=9.$ **5А.** $x=2,\ x=\frac{1}{4}.$ **6А.** $x_1=0,\ x_2=2.$ **7А.** $x=1.$ **8А.** $x=10.$ **9А.** $x=\frac{1}{2}.$ **10А.** $x=2.$ **11А.** $x=\frac{1}{2}.$ **12А.** $x=\frac{1}{2}.$ **13А.** $x=0.$ **14А.** $x=0.$ **15А.** $x=\pi.$ **16А.** $x=\frac{1}{2}.$ **17А.** $x=\frac{1}{4}.$ **18А.** $x=1.$ **19А.** $x=\frac{1}{4}.$ **20А.** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$ **21А.** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$ **22А.** $x=1.$ **23А.** $x=0.$ **24А.** $x=\pi.$ **25А.** $x=\frac{3\pi}{2}.$ **26А.** $x=-\frac{3\pi}{2}+6\pi n,\ n\in Z.$ **27А.** $x=-3.$ **28А.** $x=\frac{1}{4}.$ **29А.** $x=1.$ **30А.** $x=3.$ **31А.** $\left(1;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ \left(-1;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z.$ **32А.** $\left(1;\frac{\sqrt{6}}{2}\right),$ $\left(1;-\frac{\sqrt{6}}{2}\right),\ \left(-1;\frac{\sqrt{6}}{2}\right),\ \left(-1;-\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$ **33А.** $(1;-3).$ **34А.** $\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{4}\right),\ n,k\in Z.$ **35А.** $(n;0),\ (n;2),\ n\in Z.$ **36А.** $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ n,k\in Z.$ **37А.** $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;2\pi k\right),$ $\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\pi+2\pi k\right),\ n,k\in Z.$ **38А.** $(1;1).$ **39А.** $(\pi n;0),\ n\in Z.$ **40А.** $(1;1+4n),$

$(-1;1+4n),\ n\in Z.$ **41А.** $\left(-1;1+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z.$ **42А.** $\left(0;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z.$ **43А.** $\left(\dfrac{3}{\pi};\ \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{\pi}+2\pi n\right),$ $\left(-\dfrac{3}{\pi};\ \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{\pi}+2\pi n\right),\ n\in Z.$ **44А.** $\left((-1)^n\dfrac{\pi}{6e}+\dfrac{\pi n}{e};-e\right),$ $\left((-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6e}+\dfrac{\pi n}{e};e\right), n\in Z.$ **45А.** $\left(\pi n;\dfrac{\pi k}{2};-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi m}{3}\right),\ n,k,m\in Z.$ **46А.** $x=-1.$ **47А.** $x=2.$ **48А.** $x=2n+1,\ x=2n-\dfrac{1}{2},\ n\in Z.$ **49А.** $x=0.$ **50А.** $(1;0).$ **51А.** $(0;1).$ **52А.** $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{1}{10}\right),\ n\in Z.$ **53А.** $(0;0).$ **54А.** $(0;1).$ **55А.** $(1;0).$ **56А.** $(0;1).$

Уровень В

1В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $27x^6+(3a-4x)^3+3x^2+3a=4x$ имеет хотя бы один корень.

2В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^{10}+(a-2x)^5+x^2+a=2x$ имеет хотя бы один корень.

3В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin^{14}x+(a-3\sin x)^7+\sin^2 x+a=3\sin x$ имеет хотя бы один корень.

4В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos^{18}x+(5\cos x-a)^9+\cos^2 x+5\cos x=a$ имеет хотя бы один корень.

5В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(\sin^2 x-a\right)^9-(6\sin x+a)^3=(6\sin x+a)^9-\left(\sin^2 x-a\right)^3$ имеет хотя бы один корень.

6В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(\cos^2 x+a\right)^7-(4\cos x-a)^5=(4\cos x-a)^7-\left(\cos^2 x+a\right)^5$ имеет хотя бы один корень.

7В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения $4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$ принадлежит отрезку $[1;3]$.

8В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения $4\sqrt[5]{6,2x-5,2}+4\log_5(4x+1)+5a=0$ принадлежит отрезку $[1;6]$.

9В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\left|x+2a\right|-3a\right|+\left|\left|3x-a\right|+4a\right|\le 7x+24$ выполняется для всех значений $x\in\left[0;7\right]$.

10В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\left|x-2a\right|+3a\right|+\left|\left|3x+a\right|-4a\right|\le 5x+24$ выполняется для всех значений $x\in\left[0;6\right]$.

11В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$\left|4\cos x+a+6\right|+\left|5\cos x+a^2+1\right|\le 10\cos x+\left|a^2+a-2\right|+10.$$

12В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$\left|3\sin x+a^2-22\right|+\left|7\sin x+a+12\right|\le 11\sin x+\left|a^2+a-20\right|+11.$$

13В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$2x^3+9x+3\left|x+a-2\right|+2\left|2x-a+2\right|+\sqrt[5]{2x-3}\le 16$$

выполняется для всех значений $x\in\left[-2;1\right]$.

14В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$3x^5+11x+4\left|x-a+3\right|+2\left|3x+a-5\right|+\sqrt[3]{4x+5}\le 25$$

выполняется для всех значений $x\in\left[-4;-1\right]$.

15В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin\left(x+4a\right)+\sin\left(\dfrac{x^2-6x-7a}{2}\right)=4x-x^2-a$ не имеет действительных решений.

16В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin\left(x-3a\right)+\sin\left(\dfrac{x^2-6x+7a}{2}\right)=4x-x^2-a$ не имеет действительных решений.

17В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+ax+2=0, \\ \sin^2\pi a+\sin^2\pi x+2^{|y|}=\left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right| \end{cases}$ имеет решения.

18B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2-4ax+3=0, \\ \sin^2\pi a+\sin^2\pi x+2^{|y|}=\left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right| \end{cases}$ имеет решения.

19B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{7\cos(8x+9)+16}=8a-a^2-13$ имеет хотя бы один корень.

20B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5\sin(4x+3)+86}=5+4a-a^2$ имеет хотя бы один корень.

21B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых выражение $x+y$ принимает наименьшее значение, если $(x;y)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} 12^x+11^y=12^{a^2+9}+11^{4-6a}, \\ 12^x+11^{4-6a}=12^{a^2+9}+11^y. \end{cases}$

22B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых выражение $x+y$ принимает наименьшее значение, если $(x;y)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} 8^x+3^y=8^{a^2+100}+3^{5-20a}, \\ 8^x+3^{5-20a}=8^{a^2+100}+3^y. \end{cases}$

23B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt[6]{\lg^2 x-3\lg x+a}+\left|a^2-5a+6\right|=0$ имеет хотя бы один корень.

24B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt[4]{a^2-2a-8}+\left|\lg^2 x-\lg x+a\right|=0$ имеет хотя бы один корень.

25B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_7\dfrac{14}{12x^2-12x+5}=2(x+a-3)^2+4a^2-20a+26$ имеет хотя бы один корень.

26B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3\dfrac{18}{12x^2+36x+29}=3(x-a+3)^2+4a^2-12a+11$ имеет хотя бы один корень.

27B (ЕГЭ 2010). Найдите наибольшее значение параметра a, при котором функция $y=3+3x-3|ax+a-2|+|ax+a-6|+|x+4|$ является неубывающей на всей числовой прямой.

28B (ЕГЭ 2010). Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция $y=-7+3x-3|ax-1|+|ax-25|+|x-7|$ является неубывающей на всей числовой прямой.

29B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4|x+a|+2|x-a|+2=x+9|x-2|+2|3a+2|$ имеет два различных корня.

30B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3|x-a|+4|x+a|=x+13|x+1|+|7a-1|+1$ имеет два различных корня.

31B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x+2|x-3|-3|x-a-4|=7|x-a|$ имеет хотя бы один корень.

32B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $11|x+a|+2x+3|x-5|=5|x+a-4|$ имеет хотя бы один корень.

33B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x+1+2|x-2|=8|x-a+2|+3|x-a-2|$ имеет единственный корень.

34B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $13|x-a+1|+3|x+7|=2x+5|x-a+5|+4$ имеет единственный корень.

35B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $17|x-a|+|a^2-7x+12|+|a^2+2x-15|=|2a^2-6a+x-3|+|4|x|-|x+3a||$ имеет хотя бы один корень.

36B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $18|x+a|+|a^2+8x+12|+|a^2-x-6|=|2a^2-8a-x+6|+|5|x|-|x-4a||$ имеет хотя бы один корень.

37B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $5|x-2|+3|x+a|\le\sqrt{4-y^2}+7$ имеет хотя бы одно решение.

38B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $5|x-a|+3|x+2|\le\sqrt{9-y^2}+6$ имеет хотя бы одно решение.

39B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a+y^2=4\cos 2x, \\ \sqrt{y}+z^2=a, \\ (a-2)^2=|z^2-2z|+|\sin 4x|+4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

40B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a+\sqrt{y}=2\sin 3x, \\ |y|+z^4=8a, \\ (a-1)^2=|z^2+2z|+|\sin 6x|+1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

41B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sqrt[7]{7|x-5|+4|x+a|-1}\le\sqrt[7]{7+\sqrt{16-y^2}}+\lg\dfrac{9+\sqrt{16-y^2}}{7|x-5|+4|x+a|+1}$ имеет хотя бы одно решение.

42В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sqrt[5]{5|x+4|+2|x-a|-2} \le \sqrt[5]{2+\sqrt{36-y^2}} + \ln\frac{5+\sqrt{36-y^2}}{5|x+4|+2|x-a|+1}$ имеет хотя бы одно решение.

43В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+6|x|+5\sqrt{3x^2+25}=3x+2|x-5a|$ имеет хотя бы один корень.

44В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+8|x-5|+2\sqrt{x^2-10x+29}+25=5x+2|x-2a-5|$ имеет хотя бы один корень.

45В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+16|x|+36\log_6\left(5x^2+6\right)=6a+3|5x-6a|$ имеет хотя бы один корень.

46В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+10|x-7|+16\log_4\left(x^2-14x+53\right)=4a+3|x-4a-7|$ имеет хотя бы один корень.

47В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+13|x-4|+5^{x^2-8x+18}=5a+3|4x-5a-16|$ имеет хотя бы один корень.

48В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+2a+16|x-2a|+4\log_6\left(7x^2-28ax+28a^2+6\right)=7x+8|x-4a|$ имеет хотя бы один корень.

49В*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x-a|+|y-a|+|a+1-x|+|a+1-y|=2, \\ y+2|x-5|=6 \end{cases}$ имеет единственное решение.

50В*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x+a|+|y-a|+|a+1+x|+|a+1-y|=2, \\ y=2|x-4|-5 \end{cases}$ имеет единственное решение.

ОТВЕТЫ

1В. $a\in\left(-\infty;\frac{4}{9}\right]$. **2В.** $a\in(-\infty;1]$. **3В.** $a\in[-4;2]$. **4В.** $a\in[-4;6]$. **5В.** $a\in[-2,5;3,5]$. **6В.** $a\in[-2,5;1,5]$. **7В.** $a\in[-8,5;-3,5]$. **8В.** $a\in[-3,2;-1,6]$. **9В.** $a\in[-3;4]$. **10В.** $a\in[-4;3]$. **11В.** $a\in\{-2\}\cup[2;\infty)$. **12В.** $a\in\{-5\}\cup[5;\infty)$. **13В.** $a=1$. **14В.** $a\in\left[-\frac{7}{3};\frac{31}{3}\right]$. **15В.** $a\in(4;\infty)$. **16В.** $a\in(4;\infty)$. **17В.** $a=\pm3$.

18В. $a=\pm 1$. **19В.** $a=4$. **20В.** $a=2$. **21В.** $a=3$. **22В.** $a=10$. **23В.** $a=2$. **24В.** $a=-2$. **25В.** $a=2,5$. **26В.** $a=1,5$. **27В.** $a=1$. **28В.** $a=-1$. **29В.** $a\in(-2;2)$. **30В.** $a\in(-1;1)$. **31В.** $a\in(-\infty;-6]\cup[6;\infty)$. **32В.** $a\in[-7;5]$. **33В.** $a_1=-5,\ a_2=7$. **34В.** $a_1=-8,\ a_2=4$. **35В.** $a\in(-\infty;-5]\cup\{3\}\cup[4;\infty)$. **36В.** $a\in(-\infty;-3]\cup\{2\}\cup[6;\infty)$. **37В.** $a\in[-5;1]$. **38В.** $a\in[-5;1]$. **39В.** $a_1=0;\ a_2=4$. **40В.** $a_1=0;\ a_2=2$. **41В.** $a\in[-8;-2]$. **42В.** $a\in[-9;1]$. **43В.** $a=\pm 5$. **44В.** $a=\pm 2$. **45В.** $a\in\{-6\}\cup\left[12-6\sqrt{3};12+6\sqrt{3}\right]$. **46В.** $a\in\{-4\}\cup\left[8-4\sqrt{3};8+4\sqrt{3}\right]$. **47В.** $a\in\{-5\}\cup\left[10-5\sqrt{3};10+5\sqrt{3}\right]$. **48В.** $a\in\{-2\}\cup\left[14-8\sqrt{3};14+8\sqrt{3}\right]$. **49В.** $a_1=2,\ a_2=\dfrac{16}{3}$. **50В.** $a_1=-2,\ a_2=-\dfrac{16}{3}$.