

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

В данном разделе будут рассмотрены квадратные неравенства с параметрами, для решения которых будут использованы материалы, изученные в предыдущих разделах:

Исследование дискриминанта и применение теоремы Виета;

Расположение корней квадратного трехчлена относительно данных чисел.

Также для решения задач этого раздела необходимо уметь «легко» решать квадратные неравенства. В целом решение квадратных неравенств с параметрами вызывает больше трудностей, нежели решений квадратных уравнений с параметрами. Это связано с тем, при решении неравенств приходится разбирать больше случаев и проводить более тонкие логические рассуждения, чем при решении уравнений.

Задачи для самостоятельного решения разбиты на два уровня сложности А и В. Уровень А представляет собой простейшие квадратные неравенства с параметрами. Уровень В по сложности максимально приближен к 17 заданиям ЕГЭ по профильной математике.

Уровень А

1А. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 > 0$ выполняется при всех значениях x ?

2А. При каких значениях параметра a неравенство $-x^2 + ax - 9 < 0$ выполняется при всех значениях x ?

3А. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1 > 0$ выполняется при всех значениях x ?

4А. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2 - 4)x^2 + 2(a + 2)x - 1 < 0$ выполняется при всех значениях x ?

5А. При каких значениях параметра a неравенство $(2a + 3)x^2 - 2ax + a - 2 \geq 0$ не выполняется ни для одного значения x ?

6А. При каких значениях параметра a неравенство $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 \geq 0$ не выполняется ни для одного значения x ?

7А. Решите неравенство при всех значениях параметра a :
 $x^2 - 3ax + 2a^2 \geq 0$.

8А. Решите неравенство при всех значениях параметра a :
 $x^2 + (a - 5)x - 2a^2 + 2a + 4 < 0$.

9А. Решите неравенство при всех значениях параметра a : $ax^2 - 2x + 1 > 0$.

10А. Решите неравенство при всех значениях параметра a : $(1 - a^2)x^2 + 2ax + 1 \geq 0$.

11А. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x^2 + (2a - 1)x + 8 - 9a}{2x^2 - 3x + 3} \leq 1$ выполняется при всех значениях x ?

12А. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{-x^2 + (2a + 2)x - a}{-x^2 + x - 1} \leq 2$ выполняется при всех значениях x ?

ОТВЕТЫ

1А. $a \in (1; 6)$. **2А.** $a \in (-6; 6)$. **3А.** $a \in [1; \infty)$. **4А.** $a \in [-2; 0)$. **5А.** $a \in (-\infty; -2)$.
6А. $a \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. **7А.** $x \in (-\infty; 2a] \cup [a; \infty)$ при $a \in (-\infty; 0)$; $x \in R$ при $a = 0$;
 $x \in (-\infty; a] \cup [2a; \infty)$ при $a \in (0; \infty)$. **8А.** $x \in (a + 1; 4 - 2a)$ при $a \in (-\infty; 1)$; \emptyset при
 $a = 1$; $x \in (4 - 2a; a + 1)$ при $a \in (1; \infty)$. **9А.** $x \in \left(\frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}; \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}\right)$ при
 $a \in (-\infty; 0)$; $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ при $a = 0$; $x \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}; \infty\right)$ при
 $a \in (0; 1]$; $x \in R$ при $a \in (1; \infty)$. **10А.** $x \in \left[\frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}; \frac{-a - \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}\right]$ при
 $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$; $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ при $a = -1$; $x \in \left[-\frac{1}{2}; \infty\right)$ при $a = 1$;
 $x \in \left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}\right] \cup \left[\frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}; \infty\right)$ при $a \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$; $x \in R$
при $a \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. **11А.** $a \in [1; 6]$. **12А.** $a \in [-2; 1]$.

Уровень В

1В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 - (a - 5)x + a^2 - 4a - 5 < 0$ будет выполняться для любого значения x , принадлежащего интервалу $(-4; 0)$.

2В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 + (a-4)x + a^2 - 2a - 8 < 0$ будет выполняться для любого значения x , принадлежащего интервалу $(0;4)$.

3В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $4x^2 + 2(a-2)x + a^2 + 2a - 8 < 0$ будет выполняться для любого значения x , принадлежащего интервалу $(0;2)$.

4В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $4x^2 - 2(a-1)x + a^2 + 4a - 5 < 0$ будет выполняться для любого значения x , принадлежащего интервалу $(-2;0)$.

5В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $4(a-3)x^2 - 2(2a+1)x + a > 0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-2;2]$.

6В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $9(a-1)x^2 - 3(2a+5)x + a + 2 > 0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-3;3]$.

7В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a-3)x^2 - 2(2a-1)x + 4a - 4 > 0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-0,5;0,5]$.

8В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a-5)x^2 - (2a-3)x + a - 2 > 0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-0,25;0,25]$.

9В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 + a^2x - 2a - 4 < 0$ выполняется при всех $x \in [0;1]$.

10В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 - ax + a > 0$ выполняется при всех $|x| < 1$.

11В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $ax^2 + (a+1)x - 3 < 0$ выполняется при всех $x < 2$.

12В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ выполняется при всех $x > 0$.

13В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 - 2ax - a^2 + a + 6 < 0$ выполняется при всех $0 \leq x \leq 2$.

14В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $2x^2 + (a-1)x + 6(a-1) \leq x^2 - x - 6$ выполняется при всех $1 < x < 2$.

15В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решением неравенства $x^2 - 2ax - 3 \leq 0$ будет являться отрезок длины 4.

16В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решением неравенства $ax^2 - 2(a+1)x + 1 \geq 0$ будет являться отрезок длины меньше 2.

17В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(x-3a)(x+2a+1) < 0$ выполняется при всех $x \in [1; 3]$.

18В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a^2 - x)(x + a + 5) \geq 0$ выполняется при всех $x \in [1; 4]$.

19В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a-1)x^2 + (2a-3)x + a - 3 > 0$ выполняется хотя бы при одном $x < 1$.

20В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых из неравенства $x^2 - (a+a^3)x + a^4 < 0$ следует неравенство $x^2 + 4x + 3 < 0$.

21В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$.

22В. Найдите все значения параметра a такие, что если x удовлетворяет неравенству $ax^2 + (1-a^2)x - a > 0$, то $|x| \leq 2$.

23В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых из неравенства $1 < x \leq 2$ следует неравенство $x^2 - 2ax + a < 0$.

24В. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$ будет содержаться среди решений неравенства $ax^2 - (3a+1)x + 3 \geq 0$?

25В. При каких значениях параметра a любое решение неравенства $x^2 - x - 2 < 0$ больше любого решения неравенства $ax^2 - 4x - 1 \geq 0$?

26В (ЕГЭ 2010). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (5a+3)x + 4a^2 \leq 4$ удовлетворяет неравенству $ax(x-4-a) \leq 0$.

27В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $x^2 - (a^2+a)x + a^3 \leq 0$ содержит не менее пяти целых чисел.

28В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2 - 12x + a \leq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

29В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y + 3)^2 < 4, \\ y = 2ax^2 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

30В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
 неравенств
$$\begin{cases} x^2 + 2ax \leq 3a^2 - 8a + 4, \\ x^2 + 4ax > 2 + 5a - 3a^2 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

31В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
 неравенств
$$\begin{cases} x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 3a - 2 \leq 0, \\ x^2 - 5ax + 6a^2 + a - 1 \leq 0 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

32В. При каких значениях параметра b неравенство
 $x^2 + (2a + 4b)x + 2a^2b + 4b^2 - 2ab - 6b + 15 \leq 0$ не имеет решений ни при одном
 значении параметра a ?

ОТВЕТЫ

1В. $a \in [-1; 3]$. **2В.** $a \in [-2; 2]$. **3В.** $a \in [-4; 0]$. **4В.** $a \in [-5; -1]$. **5В.** $a \in \left[-\frac{1}{16}; \frac{44}{25}\right]$.
6В. $a \in \left[-\frac{33}{16}; 0, 34\right]$. **7В.** $a \in \left[\frac{11}{12}; \frac{23}{25}\right]$. **8В.** $a \in \left[\frac{31}{16}; \frac{49}{25}\right]$. **9В.** $a \in (-1; 3)$. **10В.**
 $a \in (0; \infty)$. **11В.** $a \in (-7 - 4\sqrt{3}; 0]$. **12В.** $a \in (1; \infty)$. **13В.** $a \in (-\infty; -5) \cup (3; \infty)$.
14В. $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. **15В.** $a = \pm 1$. **16В.** $a \in (-\infty; -1)$. **17В.** $a \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$.
18В. $a \in [-6; -2] \cup [2; \infty)$. **19В.** $a \in \left[\frac{3}{4}; \infty\right)$. **20В.** $a \in [-\sqrt[3]{3}; -1] \cup \{0; 1\}$. **21В.**
 $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **22В.** $a \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$. **23В.** $a \in \left[\frac{4}{3}; \infty\right)$. **24В.** $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **25В.**
 $a \in (-\infty; -4)$. **26В.** $a_1 = -\frac{5}{3}$, $a_2 = -\frac{3}{2}$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$. **27В.** $a \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{7}; \infty)$.
28В. $a \in (-\infty; 20]$. **29В.** $a \in \left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{5}}{16}\right)$. **30В.** $a \in \left(-\infty; \frac{2}{9}\right) \cup (2; \infty)$. **31В.**
 $a \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. **32В.** $b \in \left(\frac{5}{7}; 1\right)$.