

## ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

Линейные уравнения, неравенства и системы линейных уравнений относятся к числу самых простых задач с параметрами. Поэтому задачи этого раздела являются подготовительными заданиями к решению реальных задач с параметрами, предлагаемых на ЕГЭ.

### Линейные уравнения и приводимые к ним уравнения с параметрами

#### Уровень А

- 1А. Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$ :  $(2a - 4)x = 3a + 1$ .
- 2А. Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$ :  $a^2x - 5a = 9x - 15$ .
- 3А. Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$ :  $(a^2 - 2a + 1)x = a^2 + 2a - 3$ .
- 4А. Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$ :  $a^2(x - 2) = x + a - 3$ .
- 5А. Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$ :  $\frac{a + 2}{x - 2} = a - 1$ .
- 6А. Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$ :  $\frac{a + 3}{a + 2} = \frac{2}{x} - \frac{5}{x(a + 2)}$ .
- 7А. Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$ :  $1 + \frac{1}{ax} = \frac{1}{x} - \frac{3}{a}$ .
- 8А. Решите уравнение при всех значениях параметров  $a$  и  $b$ :  $\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{a}{b}$ .
- 9А. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(a^6 + 12a - 40)x = a^2 + a - 2$  имеет бесконечное число решений?
- 10А. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(3a^2 - a - 2)x = 6a + 4$  не имеет решений?
- 11А. При каких значениях параметра  $a$  все решения уравнения  $(a^2 + a)x = 2a^2 + 3a$  удовлетворяют условию  $x > 1$ ?
- 12А. При каких значениях параметра  $a$  все решения уравнения  $a(a + 2x) = 7x + 2a + 5$  удовлетворяют условию  $x \geq -3$ ?

## ОТВЕТЫ

- 1А.**  $\emptyset$  при  $a=2$ ;  $x=\frac{3a+1}{2a-4}$  при  $a\neq 2$ . **2А.**  $\emptyset$  при  $a=-3$ ;  $x\in R$  при  $a=3$ ;  
 $x=\frac{5}{a+3}$  при  $a\neq \pm 3$ . **3А.**  $x\in R$  при  $a=1$ ;  $x=\frac{a+3}{a-1}$  при  $a\neq 1$ . **4А.**  $\emptyset$  при  $a=-1$ ;  
 $x\in R$  при  $a=1$ ;  $x=\frac{2a+3}{a+1}$  при  $a\neq \pm 1$ . **5А.**  $\emptyset$  при  $a=1, a=-2$ ;  $x=\frac{3a}{a-1}$  при  
 $a\neq 1, a\neq -2$ . **6А.**  $\emptyset$  при  $a=-3, a=-2, a=\frac{1}{2}$ ;  $x=\frac{2a-1}{a+3}$  при  
 $a\neq -3, a\neq -2, a\neq \frac{1}{2}$ . **7А.**  $\emptyset$  при  $a=-3, a=0, a=1$ ;  $x=\frac{a-1}{a+3}$  при  
 $a\neq -3, a\neq 0, a\neq 1$ . **8А.**  $\emptyset$  при  $a=-b$  или  $b=0$ ;  $x=\frac{a-b}{a+b}$  при  $a\neq -b$  и  $b\neq 0$ .  
**9А.**  $a=-2$ . **10А.**  $a=1$ . **11А.**  $a\in(-\infty; -2)\cup(-1; 0)\cup(0; \infty)$ . **12А.**  
 $a\in(-\infty; 3,5)\cup\{4\}$ .

## Уровень В

- 1В.** При каких значениях параметра  $a$  множества решений уравнений  $(a^2+a-6)x=2a^2-3a-2$  и  $(3a^2-a-10)x=3a^2-4a-4$  совпадают?
- 2В.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(3b+1)x=a^2+5a-6b+4$  имеет решение при любом  $b$ ?
- 3В.** При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  уравнение  $(a+b)(abx-1)=ab+6x-5$  имеет более одного решения?
- 4В.** При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  уравнение  $(a-2)x+b(x-2)=(2b-1)x+(2x-1)a$  имеет не менее трёх корней?
- 5В.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|9x+7a-3|=|4x+3a+4|$  имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно  $-8$ ?
- 6В.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|7x+8a-5|=|9x+7a-2|$  имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно  $9$ ?
- 7В.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $6\log_7 \sin x + a\log_7 \sin x = a^2 + 5a + 4$  имеет хотя бы один корень?
- 8В.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\log_{0,5} \cos x + 7a = a\log_{0,25} \cos x + a^2 + 12$  имеет хотя бы один корень?
- 9В.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(2^{\sin x} - 1)a^2 - (3 \cdot 2^{\sin x} - 1)a + 2^{\sin x + 1} = 0$  имеет хотя бы один корень?

**10В.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(3^{\cos x} - 1)a^2 - (5 \cdot 3^{\cos x} - 2)a + 2 \cdot 3^{\cos x + 1} = 0$  имеет хотя бы один корень?

### ОТВЕТЫ

**1В.**  $a = -1, a = \frac{1}{3}, a = 2.$  **2В.**  $a = -3, a = -2.$  **3В.**  $a = 2, b = 1; a = 1, b = 2.$  **4В.**  
 $a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}.$  **5В.**  $a = \frac{563}{51}.$  **6В.**  $a = -\frac{305}{7}.$  **7В.**  $a \in (-\infty; -6) \cup [-4; -1].$  **8В.**  
 $a \in (-\infty; 2) \cup [3; 4].$  **9В.**  $a \in (-\infty; -2] \cup \{1\} \cup [4; \infty).$  **10В.**  $a \in (-\infty; -1,5] \cup \{2\} \cup [4,5; \infty).$

## Линейные неравенства и приводимые к ним неравенства с параметрами

### Уровень А

- 1А.** Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  $ax \leq 1.$
- 2А.** Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  $\frac{1}{x} > \frac{1}{a}.$
- 3А.** Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  $(a^2 - a)x < 3 - 3a.$
- 4А.** Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  $a^2 + ax < 1 - x.$
- 5А.** Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  $3(a - 2x) < ax + 1.$
- 6А.** Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  
 $2a^2x - 2a + 2 > (a + 1)x.$
- 7А.** Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  $a(ax - 1) \geq x + 1.$
- 8А.** Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  
 $4xa^2 - (17x + 4)a + 4x + 1 \geq 0.$
- 9А.** Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  
 $5xa^2 - (26x + 1)a + 5x + 5 \leq 0.$
- 10А.** Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  
 $\frac{ax}{a-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}.$
- 11А.** Решите неравенство при всех значениях параметров  $a$  и  $b$ :  $ax < b.$
- 12А.** Решите неравенство при всех значениях параметров  $a$  и  $b$ :  
 $ax - 2a > bx - 2b.$

## ОТВЕТЫ

**1А.**  $x \in R$  при  $a = 0$ ;  $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right]$  при  $a > 0$ ;  $x \in \left[\frac{1}{a}; \infty\right)$  при  $a < 0$ . **2А.**  $\emptyset$  при  $a = 0$ ;  $0 < x < a$  при  $a > 0$ ;  $x < a$  или  $x > 0$  при  $a < 0$ . **3А.**  $x \in R$  при  $a = 0$ ;  $\emptyset$  при  $a = 1$ ;  $x \in \left(-\frac{3}{a}; \infty\right)$  при  $a \in (0; 1)$ ;  $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{a}\right)$  при  $a \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$ . **4А.**  $\emptyset$  при  $a = -1$ ;  $x \in (-\infty; 1 - a)$  при  $a > -1$ ;  $x \in (1 - a; \infty)$  при  $a < -1$ . **5А.**  $x \in R$  при  $a = -6$ ;  $x < \frac{3a-1}{a+6}$  при  $a < -6$ ;  $x > \frac{3a-1}{a+6}$  при  $a > -6$ . **6А.**  $\emptyset$  при  $a = 1$ ;  $x \in R$  при  $a = -\frac{1}{2}$ ;  $x > \frac{2}{2a+1}$  при  $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$ ;  $x < \frac{2}{2a+1}$  при  $a \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ . **7А.**  $\emptyset$  при  $a = 1$ ;  $x \in R$  при  $a = -1$ ;  $x \geq \frac{1}{a-1}$  при  $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ ;  $x \leq \frac{1}{a-1}$  при  $a \in (-1; 1)$ . **8А.**  $\emptyset$  при  $a = 4$ ;  $x \in R$  при  $a = 0, 25$ ;  $x \geq \frac{1}{a-4}$  при  $a \in (-\infty; 0, 25) \cup (4; \infty)$ ;  $x \leq \frac{1}{a-4}$  при  $a \in (0, 25; 4)$ . **9А.**  $\emptyset$  при  $a = 0, 2$ ;  $x \in R$  при  $a = 5$ ;  $x \geq \frac{1}{5a-1}$  при  $a \in (0, 2; 5)$ ;  $x \leq \frac{1}{5a-1}$  при  $a \in (-\infty; 0, 2) \cup (5; \infty)$ . **10А.**  $\emptyset$  при  $a = 2$ ;  $x \in R$  при  $a = -10$ ;  $x > \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$  при  $a \in (-10; 2)$ ;  $x < \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$  при  $a \in (-\infty; -10) \cup (2; \infty)$ . **11А.**  $\emptyset$  при  $a = 0, b \leq 0$ ;  $x \in R$  при  $a = 0, b > 0$ ;  $x < \frac{b}{a}$  при  $a \in (0; \infty), b \in R$ ;  $x > \frac{b}{a}$  при  $a \in (-\infty; 0), b \in R$ . **12А.**  $\emptyset$  при  $a = b$ ;  $x > 2$  при  $a > b$ ;  $x < 2$  при  $a < b$ .

## Уровень В

**1В.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $|3x - 5a - 3| \leq 7 - 5a - x$  имеет единственное решение?

**2В.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $|3x - 4a - 1| \leq 5 - 4a - x$  имеет единственное решение?

**3В.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $ax + 2 - \frac{a}{3} > 0$  выполняется при всех  $x \in (1; 2)$ ?

**4В.** При каких значениях параметра  $a$  все решения неравенства  $x - 4 + 2a < 0$  являются решениями неравенства  $2x + 3 - a < 0$ ?

**5В.** При каких значениях параметра  $a$  множество решений уравнения  $(2a^2 - a - 1)x = 5a - 5$  и неравенства  $(6a^2 + a - 1)x \geq 3a + 2$  совпадают?

**6В.** При каких значениях параметра  $a$  множество решений уравнения  $(a^3 - a)x = 2a^{12} - 3a$  и неравенства  $(a^2 - a)x < 3 - 3a$  совпадают?

**7В.** При каких значениях параметра  $a$  множество решений неравенств  $(a^2 - 6a + 8)x \leq 3a - 12$  и  $(2a^2 - a^3)x \geq 6a + 7 - 4a^2$  совпадают?

**8В.** При каких значениях параметра  $a$  множество решений неравенств  $(a^2 - a)x < 3 - 3a$  и  $(11a - 3a^2 - 8)x > a^2 - 6a + 5$  совпадают?

### ОТВЕТЫ

**1В.**  $a = 0,9$ . **2В.**  $a = 0,875$ . **3В.**  $a \in [-1, 2; \infty)$ . **4В.**  $a \in [2, 2; \infty)$ . **5В.**  $a = -\frac{1}{2}$ . **6В.**  $a = 0$ ,  $a = 1$ . **7В.**  $a = 2$ ,  $a = 7$ . **8В.**  $a = 1$ ,  $a = 12$ .

### Линейные системы уравнений и приводимые к ним системы уравнений с параметрами

**1А.** Решите систему уравнений при всех значениях параметра  $a$ :

$$\begin{cases} 5x + ay = 2a + 1, \\ (a + 1)x + 4y = 9. \end{cases}$$

**2А.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} 2x + (a - 1)y = 3, \\ (a + 1)x + 4y = -3 \end{cases}$$

не имеет решений?

**3А.** При каких значениях параметра  $a$  решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

удовлетворяет также неравенству  $x > y$ ?

**4А.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = b, \\ bx - y = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любых значениях параметра  $b$ ?

**5А.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ 5x - ay = 2 \end{cases}$$

имеет решения  $x < 0$ ,  $y < 0$ ?

**6А.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} (2a^2 - 11a)x - 25y = 2a^2 - 13a - 30, \\ 8x - 5y = 3 \end{cases}$$

имеет не менее семи решений?

**7А.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений  

$$\begin{cases} (9a^2 - 49a)x + 36y = 9a^2 - 58a + 44, \\ 9y - 5x = 5 \end{cases}$$
 имеет не менее четырех решений?

**8А.** Решите систему уравнений при всех значениях параметра  $a$ :  

$$\begin{cases} x + 7y = 2, \\ 3x + y = a, \\ 3x + 13y = a^2 + 3a. \end{cases}$$

**9А.** Решите систему уравнений при всех значениях параметра  $a$ :  

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x - y = a, \\ 4x - y = a^2 + 2a. \end{cases}$$

**10А.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений  

$$\begin{cases} 3x + y = b, \\ 2bx - 2y = a + 4 \end{cases}$$
 имеет решения при любом значении параметра  $b$ ?

**11А.** При каких значениях параметра  $b$  система уравнений 
$$\begin{cases} 3x - ay = b, \\ 2x + y = a \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра  $a$ ?

**12А.** При каких значениях параметра  $a$ , для каждого из которых числа  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие системе уравнений 
$$\begin{cases} 3x + y = a, \\ x + 2y = 2a + 1 \end{cases}$$
 удовлетворяют также неравенству  $x > 3y$ ?

## ОТВЕТЫ

**1А.**  $\emptyset$  при  $a = -5$ ; бесконечное множество решений при  $a = 4$ ;  
 $x = \frac{1}{a+5}$ ,  $y = \frac{2a+11}{a+5}$  при  $a \neq -5$ ,  $a \neq 4$ . **2А.**  $a = 3$ . **3А.**  $a \in (-\infty; 6)$ . **4А.**  $a = 3$ .

**5А.**  $a \in (10; 12)$ . **6А.**  $a = -2,5$ . **7А.**  $a = \frac{4}{9}$ . **8А.**  $(0,25; 0,25)$  при  $a = 1$ ;  $(-1,36; 0,48)$

при  $a = -3,6$ ;  $\emptyset$  при  $a \neq -3,6$ ,  $a \neq 1$ . **9А.**  $(1; 1)$  при  $a = 1$ ;  $(\frac{2}{9}; \frac{16}{9})$  при  $a = -\frac{4}{3}$ ;  $\emptyset$

при  $a \neq -\frac{4}{3}$ ,  $a \neq 1$ . **10А.**  $a = 2$ . **11А.**  $b = -\frac{9}{4}$ . **12А.**  $a \in (-\infty; -\frac{2}{3})$ .

### Уровень В

**1В.** При каких значениях параметра  $a$  решения системы уравнений 
$$\begin{cases} x - 2y = a, \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$
 удовлетворяют условиям  $x > \frac{1}{a}$ ,  $y > 0$ ?

**2В.** При каких значениях параметра  $a$  решения системы уравнений 
$$\begin{cases} x + ay = 3, \\ ax + 4y = 6 \end{cases}$$
 находятся вне окружности  $x^2 + y^2 = 1$ ?

**3В.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 4a, \\ \frac{2}{x} - \frac{6}{y} = 3 + 4a \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение?

**4В.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3a, \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 3 - a \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение?

**5В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых каждая из систем уравнений 
$$\begin{cases} (x - 6y)^{-1} = -0,1, \\ 7x - 2y = 2a \end{cases}$$
 и 
$$\begin{cases} 4x + y = 2a, \\ \frac{1}{x - 4y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$
 имеет единственное решение и эти решения совпадают.

**6В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых каждая из систем уравнений 
$$\begin{cases} (x - 5y)^{-1} = -\frac{1}{8}, \\ 3x + y = 3a \end{cases}$$
 и 
$$\begin{cases} 7x - 3y = 3a, \\ \frac{1}{x - 3y} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$
 имеет единственное решение и эти решения совпадают.

**7В.** Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что система уравнений 
$$\begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c + 1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$
 имеет бесконечно много решений, причем  $x = 1$ ,  $y = 3$  есть одно из них. Найдите  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

**8В.** При каких значениях  $c$  и  $d$  система уравнений 
$$\begin{cases} (c - 2)^2 x + (c + 2)y = c - 6, \\ (d + 3)x + (d - 1)y = c - 2d + 4 \end{cases}$$
 имеет единственное решение  $x = -1$ ,  $y = 2$ ?

**9В.** При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  системы уравнений

$$\begin{cases} x - 3y = b^2 - 2, \\ 2x + y = 5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x + 4by = 3a + 2, \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ являются равносильными?}$$

**10В.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} \sin x - 4 = 3a - 2^{1+y^2}, \\ 2^{2+y^2} - 3 = a + 3\sin x \end{cases} \text{ имеет решение?}$$

**11В.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} 6 \cdot 2^{x^2} + 2 = 4a - \sin y, \\ 5\sin y + 10 = a + 2^{3+x^2} \end{cases} \text{ имеет решение?}$$

**12В.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} 12\cos^2 x + 11\cos^2 y + 33a = 31, \\ 33\cos^2 x + 4\cos^2 y + 151 = 198a \end{cases} \text{ имеет решение?}$$

**13В.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} 21\sin^2 x + 8\sin^2 y + 59 = 6a, \\ 24\sin^2 x + 7\sin^2 y + 91 = 9a \end{cases} \text{ имеет решение?}$$

**14В.** При каких значениях параметра  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  система уравнений

$$\begin{cases} x\sin\alpha + 2y\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha, \\ (\cos\alpha + 1)x + 3y = 3 \end{cases} \text{ имеет бесконечное число решений?}$$

## ОТВЕТЫ

**1В.**  $a \in (-8 - \sqrt{71}; 0) \cup \left(-8 + \sqrt{71}; \frac{8}{3}\right)$ . **2В.**  $a \in (-3\sqrt{5} - 2; -2) \cup (-2; 3\sqrt{5} - 2)$ . **3В.**

$a \in \left(-\infty; \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; \infty\right)$ . **4В.**  $a \in \left(-\infty; \frac{3}{16}\right) \cup \left(\frac{3}{16}; \frac{3}{13}\right) \cup \left(\frac{3}{13}; \infty\right)$ . **5В.**  $a = 5$ .

**6В.**  $a = \frac{8}{3}$ . **7В.**  $a = 0, b = 0, c = \frac{9}{4}$ ;  $a = 2, b = -1, c = 1$ . **8В.**  $c = -1, d = \frac{8}{3}$ . **9В.**

$a = -\frac{2}{3}, b = -1$ . **10В.**  $a \in [-0,5; 0]$ . **11В.**  $a \in [2; 3]$ . **12В.**  $a \in \left[\frac{17}{22}; \frac{9}{11}\right]$ . **13В.**

$a \in [10,5; 11]$ . **14В.**  $\alpha = \pm \frac{\pi}{3}, \alpha = 0$ .