

РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА ОТНОСИТЕЛЬНО ДАННЫХ ЧИСЕЛ

Решение многих задач с параметрами сводится к исследованию квадратного трехчлена. Для решения некоторых задач этого вида достаточно исследования дискриминанта и применение теоремы Виета. В данном разделе будут рассмотрены задачи связанные с исследованием расположения корней квадратного трехчлена относительно заданных чисел, для решения которых будут использованы материалы, изученные в предыдущем разделе:

Исследование дискриминанта и применение теоремы Виета.

Приведем формулировки некоторых утверждений о расположении корней квадратного трехчлена.

Теорема 1. Пусть числа x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена (положим $x_1 < x_2$)

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

у которого

$$D = b^2 - 4ac > 0, \quad a \neq 0,$$

и даны A и B – некоторые точки на оси Ox . Тогда являются истинными следующие утверждения.

1. Оба корня меньше числа A , т.е. $x_1 < A$ и $x_2 < A$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ x_B = -\frac{b}{2a} < A, \\ f(A) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ x_B = -\frac{b}{2a} < A, \\ f(A) < 0. \end{cases}$$

2. Корни лежат по разные стороны от числа A , т.е. $x_1 < A < x_2$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0. \end{cases}$$

При этом в пункте 2 нет необходимости проверять знак дискриминанта, так как он автоматически будет больше нуля.

3. Оба корня больше числа A , т.е. $x_1 > A$ и $x_2 > A$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ x_B = -\frac{b}{2a} > A, \\ f(A) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ x_B = -\frac{b}{2a} > A, \\ f(A) < 0. \end{cases}$$

4. Оба корня лежат между точками A и B , т.е. $A < x_1 < B$ и $A < x_2 < B$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ A < x_B = -\frac{b}{2a} < B, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ A < x_B = -\frac{b}{2a} < B, \\ f(A) < 0, \\ f(B) < 0. \end{cases}$$

5. Корни лежат по разные стороны от отрезка $[A; B]$, т.е. $x_1 < A < B < x_2$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0, \\ f(B) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0. \end{cases}$$

Утверждений, подобным утверждениям 1-5 в теореме 1, можно составить достаточно много. Ситуации в задачах могут возникнуть самые разнообразные: промежутки могут быть замкнутыми или открытыми (с одного или с двух концов), количество чисел, относительно которых рассматривается расположение корней, может быть три или четыре и т.д. Поэтому будет гораздо лучше, если к каждой конкретной задаче будет сделан рисунок и будут записаны все нужные условия, т.к. при наличии такого многообразия возможных ситуаций надо рассчитывать на понимание, которое появится в результате самостоятельного решения большого количества задач.

Пример 1. При каких значениях параметра a число 2 находится между корнями квадратного уравнения $x^2 + (4a + 5)x + 3 - 2a = 0$?

Решение. Воспользуемся теоремой 1 о расположении корней квадратного трехчлена (корни лежат по разные стороны от числа A , пункт 2). Для удовлетворения требованиям задачи достаточно выполнения одного условия:

$$f(2) = 2^2 + (4a + 5) \cdot 2 + 3 - 2a < 0$$

Решая которое, получим, что число 2 находится между корнями квадратного уравнения при $a < -\frac{17}{6}$.

Пример 2. При каких значениях параметра a все корни уравнения $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше $\frac{1}{2}$?

Решение. Если $a = 2$, то получаем линейное уравнение $-6x + 4 = 0$, корень которого равен $\frac{2}{3}$, а это больше $\frac{1}{2}$, поэтому $a = 2$ удовлетворяет условию задачи.

Воспользуемся теоремой 1 о расположении корней квадратного трехчлена (корни больше числа A , пункт 3). Для удовлетворения требованиям задачи достаточно выполнения следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 - a > 0, \\ D \geq 0, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \\ x_B > \frac{1}{2}, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 - a < 0, \\ D \geq 0, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \\ x_B > \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Эта совокупность систем равносильна одной системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0, \\ (2 - a) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \\ x_B > \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Для нашего конкретного примера последняя система примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 17a^2 - 16a \geq 0, \\ (2 - a) \cdot \frac{a + 2}{4} > 0, \\ \frac{3a}{2(2 - a)} > \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Решение последней системы: $a \in \left[\frac{16}{17}; 2\right)$. Добавив к этому решению $a = 2$,

найденное в самом начале, окончательно получим: $a \in \left[\frac{16}{17}; 2\right]$.

Задачи для самостоятельного решения разбиты на два уровня сложности А и В. Уровень А представляет собой простейшие задачи с параметрами на расположение корней квадратного трехчлена относительно заданных чисел. Уровень В по сложности максимально приближен к 17 заданиям ЕГЭ по профильной математике.

Уровень А

1А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a - 4)x^2 - 3ax + a - 2 = 0$ имеет два корня разных знаков.

2А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 - 4ax + a - 1 = 0$ имеет два корня разных знаков.

3А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a^2 - 9)x^2 - (2a^2 + 5a - 9)x + a + 3 = 0$ имеет два корня разных знаков.

4А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(25 - a^2)x^2 - (4a^2 - a - 7)x + a - 5 = 0$ имеет два корня разных знаков.

5А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^2 + ax + 4 - a = 0$ имеет два различных корня, один из которых больше 3, а другой меньше 3.

6А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$ имеет два различных корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1.

7А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ имеет два различных корня, каждый из которых больше 3.

8А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax^2 - 2(2a - 1)x + 2 - 3a = 0$ имеет два различных корня, каждый из которых больше 1.

9А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4ax + 1 - 2a + 4a^2 = 0$ имеет два различных корня, каждый из которых меньше -1 .

10А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax^2 - (2a + 1)x - 1 + 3a = 0$ имеет два различных корня, каждый из которых меньше 1.

11А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - ax + 2 = 0$ имеет два различных корня, принадлежащих интервалу $(0; 3)$.

12А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$ принадлежат интервалу $(0; 3)$.

13А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ принадлежат отрезку $[-2; 6]$.

14А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 2 = 0$ принадлежат отрезку $[2; 5]$.

15А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $ax^2 + (4 - 2a)x + 1 = 0$ по модулю меньше 1.

16А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $ax^2 - (a+1)x + 2 = 0$ по модулю меньше 1.

17А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a+6)x^2 + 2(a-6)x - 2a + 6 = 0$ имеет два различных корня, модуль каждого из которых меньше 2.

18А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2(a+5)x^2 + 2(a-7)x - a + 4 = 0$ имеет два различных корня, модуль каждого из которых меньше 1.

19А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$ лежат на отрезке $[a; 3a + 2]$.

20А. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 + (a^2 - 1)x - a^2 = 0$ лежат на интервале $(-3a; a)$.

ОТВЕТЫ

1А. $a \in (2; 4)$. **2А.** $a \in (1; 2)$. **3А.** $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3)$. **4А.** $a \in (-5; 5) \cup (5; \infty)$.

5А. $a \in (-\infty; -11)$. **6А.** $a \in (-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11})$. **7А.** $a \in \left(\frac{11}{9}; \infty\right)$. **8А.** \emptyset . **9А.**

$a \in (1; \infty)$. **10А.** $a \in \left(\frac{2 - \sqrt{6}}{4}; 0\right)$. **11А.** $a \in \left(2\sqrt{2}; \frac{11}{3}\right)$. **12А.** $a \in \left(\frac{12}{7}; \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \{1\}$.

13А. $a \in [0; 4]$. **14А.** $a \in [2 + \sqrt{2}; 5 - \sqrt{2}]$. **15А.** $a \in \{0\} \cup [4; 5)$. **16А.**

$a \in [3 + 2\sqrt{2}; \infty)$. **17А.** $a \in (-1; 0) \cup (2; 27)$. **18А.** $a \in (0; 1) \cup (3; 28)$. **19А.**

$a \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$. **20А.** $a \in (1; 3)$.

Уровень В

1В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - (2a - 5)x + a - 7 = 0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 3.

2В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - (3a - 7)x + a - 4 = 0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 2.

3В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(2a-1)x^2 - (a-3)x + a + 5 = 0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых больше 1.

4В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a+1)x^2 - (2a+1)x + 2a - 5 = 0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых больше 4.

5В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a+4)x^2 + 4(a+1)x + 2a + 2 = 0$ имеет хотя бы один корень, больший -2 .

6В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a-4)x^2 - 6(a-2)x + 7a - 10 = 0$ имеет хотя бы один корень, меньший 3.

7В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - ax + 2 = 0$ имеет единственный корень, удовлетворяющий условию $1 < x < 3$.

8В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a-1)x^2 - (a+1)x + a = 0$ имеет единственный корень, удовлетворяющий условию $0 < x < 3$.

9В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a .

10В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 + 2x + a = 0$ больше a .

11В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $(a^2 - 1)x^2 + (6a - 1)x - a^4 = 0$ больше a , а другой меньше a .

12В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $(a+1)x^2 + (a-2)x - a^3 = 0$ больше a , а другой меньше a .

13В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ больше 3, а другой меньше 2.

14В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $(a+1)x^2 - (2a+1)x + a - 2 = 0$ положителен, а другой меньше, чем -3 .

15В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни x_1 и x_2 уравнения $(3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a + 3 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 < -1 < x_2 < 1$.

16В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$ удовлетворяют условиям $x_1 \leq -1$ и $2 \leq x_2 < 4$.

17В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $a^2x^2 + ax - 2 = 0$ по модулю больше 1, а второй по модулю меньше 1.

18В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a - 2 = 0$ находится между числами 1 и 3, а второй между числами 4 и 6.

19В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 2\log_a(a+1) \cdot x + \log_a(a-4) = 0$ удовлетворяют условиям $x_1 < 0$ и $x_2 > 1$.

20В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни x_1 и x_2 уравнения $-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\log_{|a|}(a-2) \cdot x + \log_{|a|}(a-3) = 0$ удовлетворяют условиям $x_1 < 0$ и $x_2 > 2$.

21В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^2 + (a-4)x + a + 2 = 0$ имеет различные корни, удовлетворяющие неравенству $|x-1| > 2$.

22В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 2x + a - 4 = 0$ имеет различные корни, удовлетворяющие неравенству $|x-1| < 2$.

ОТВЕТЫ

1В. $a \in \left(\frac{13}{7}; \frac{17}{5}\right)$. **2В.** $a \in \left(2; \frac{14}{5}\right)$. **3В.** $a \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. **4В.** $a \in \left(-1; -\frac{7}{10}\right)$. **5В.**
 $a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$. **6В.** $a \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$. **7В.** $a \in \{2\sqrt{2}\} \cup \left[3; \frac{11}{3}\right)$. **8В.**
 $a \in \left(0; \frac{12}{7}\right] \cup \left\{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right\}$. **9В.** $a \in (-\infty; -2)$. **10В.** $a \in (-\infty; -3)$. **11В.**
 $a \in (-1; 0) \cup \left(\frac{1}{5}; 1\right)$. **12В.** $a \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$. **13В.** $a \in (2; 5)$. **14В.** $a \in \left(-1; -\frac{5}{8}\right)$.
15В. $a \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right)$. **16В.** $a \in \left(-3; \frac{2}{11}\right]$. **17В.** $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$. **18В.** $a \in (2; 4)$.
19В. $a \in (4; 5)$. **20В.** $a \in (3 + \sqrt{3}; \infty)$. **21В.** $a \in (16; \infty)$. **22В.** $a \in (1; 5)$.