ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

В этом разделе будут рассмотрены задачи с параметрами, решение которых сводится к исследованию расположения корней квадратных уравнений и неравенств относительно некоторых чисел только после определенных предварительных действий: замены переменной, алгебраических действий и т.д. В основном это будут показательные, логарифмические, алгебраические и тригонометрические уравнения и неравенства, которые после замены переменной приводятся к квадратным. Для этого необходимо хорошо знать свойства показательной, логарифмической и тригонометрических функций. В частности, необходимо знать область определения, множество значений, промежутки возрастания и убывания этих функций, а также уметь решать простейшие уравнения и неравенства, содержащие эти функции.

Кроме вышесказанного, для решения задач из этой темы будут использованы материалы, изученные в предыдущих разделах:

Исследование дискриминанта и применение теоремы Виета;

Расположение корней квадратного трехчлена относительно данных чисел;

Квадратные неравенства с параметрами.

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение

$$a\cdot 4^x-2\cdot 2^x+1=0$$

имеет единственное решение?

Решение. При $a=0$ уравнение примет вид $-2\cdot 2^x+1=0$, откуда $x=-1$. Если $a\neq 0$, то, положив $2^x=t$ $\left(t>0\right)$, получим квадратное уравнение относительно t:

$$a\cdot t^2-2t+1=0. \qquad (1)$$

Полученное уравнение имеет одно решение t, если его дискриминант равен нулю $D=4-4a=0$, откуда $a=1$. При $a=1$ корень уравнения (1) $t=1$, т.е. больше нуля, следовательно, исходное уравнение будет иметь один корень.

Не рассмотрен еще один случай, а именно, когда уравнение (1) имеет два решения, но только одно из них положительное. Это условие можно записать, используя теорему о знаках корней квадратного трехчлена с помощью следующего соотношения

$$t_1\cdot t_2=\frac{1}{a}<0.$$

Откуда получаем $a<0$.

Случай когда один корень уравнения (1) равен 0, а второй больше 0 невозможен, т.к. $t=0$ не удовлетворяет уравнению (1).

Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение при $a\leq 0$ и $a=1$.

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sin^2 x + a \cdot \sin x = a^2 - 1$$

имеет решения?

Решение. После замены переменной $\sin x = t$, где $-1 \le t \le 1$, исходная задача сводится к следующей: «при каких значениях параметра a уравнение

$$t^2 + at - a^2 + 1 = 0 \qquad (2)$$

имеет хотя бы одно решение на множестве $-1 \le t \le 1$»?

Можно вычислить корни уравнения (2) и попытаться определить значения параметра, при которых хотя бы один из найденных корней удовлетворяет условию $-1 \le t \le 1$. Такой способ приведет к необходимости решения нескольких иррациональных неравенств, и назвать его рациональным нелегко.

Для решения данной задачи наиболее рациональным будет использование теоремы о расположении корней квадратного трехчлена.

Случай, когда только один из корней квадратного трехчлена

$$f(t) = t^2 + at - a^2 + 1$$

лежит на отрезке $[-1;1]$, разрешается условием

$$f(-1) \cdot f(1) \le 0.$$

Решение этого неравенства имеет вид $-2 \le a \le -1$ и $1 \le a \le 2$.

Случай, когда оба корня рассматриваемого трехчлена лежат на отрезке $[-1;1]$, описывается системой неравенств

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ f(-1) \ge 0, \\ f(1) \ge 0, \\ -1 \le t_{\text{В}} \le 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $-1 \le a \le -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}} \le a \le 1$. Таким образом, исходное уравнение имеет решение при $-2 \le a \le -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}} \le a \le 2$.

Задачи этого раздела для самостоятельного решения мы решили не разбивать на несколько уровней сложностей и всем им присвоили уровень В.

Уровень В

1В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a\log_3^2 x - (a-2)\log_3 x - 2 \ge 0$ имеет единственное решение.

2В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a\log_5^2 x - (a+3)\log_5 x + 3 \le 0$ имеет единственное решение.

3В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $25^x-2(a+1)\cdot 5^x+9a-5=0$ имеет ровно один корень.

4В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9^x+(a+2)\cdot 3^x+\frac{a}{2}+3=0$ имеет ровно один корень.

5В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{5a}{a-3}\cdot 7^{|x|}=49^{|x|}+\frac{6a+7}{a-3}$ имеет два различных корня.

6В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{4a}{a-6}\cdot 3^{|x|}=9^{|x|}+\frac{3a+4}{a-6}$ имеет два различных корня.

7В. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $3\cdot 4^x-6a\cdot 2^x+3a^2+2a-14<0$ не имеет решений.

8В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9^x-2a\cdot 3^x+a^2+a-5<0$ не имеет решений.

9В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin^2 x+a\sin x=a^2-1$ имеет решения.

10В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\cos 2x-4a\cos x+a^2+2=0$ не имеет корней.

11В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^{\sin x}+a\cdot 2^{\sin x}+a^2-1=0$ не имеет корней.

12В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $25^{x^2}-2(a+1)5^{x^2}+9a-5=0$ имеет четыре различных решения.

13В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\frac{2ax+a(1-2a)}{2a^2+2ax-1}<0$ выполняется для любых значений переменной x из отрезка $[-2;2]$.

14В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\frac{6ax-a(2-a)}{a^2-6ax-8}>0$ выполняется для любых значений переменной x из отрезка $[-3;3]$.

15В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg^2(3x^2+6x+4)+(5a^2-a+4)\lg(3x^2+6x+4)-a-2=0$ имеет хотя бы один корень.

16В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg^2\left(5x^2-10x+6\right)+\left(3a^2-5a+6\right)\lg\left(5x^2-10x+6\right)-4a+3=0$ имеет хотя бы один корень.

17В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3^2\left(7x^2+1\right)+\left(3a^2-a+3\right)\log_3\left(7x^2+1\right)+4a^2-a^4=0$ имеет хотя бы один корень.

18В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_5^2\left(4x^2+1\right)+\left(2a^2-3a+4\right)\log_5\left(4x^2+1\right)+9a^2-a^4=0$ имеет хотя бы один корень.

19В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3\left(9^x+9a\right)=x$ имеет два различных корня.

20В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_2\left(4^x-a\right)=x$ имеет два различных корня.

21В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $36^x-2(a+1)\cdot 6^x+a^2+2a-8=0$ имеет единственный корень.

22В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9^x-2(2a+1)\cdot 3^x+a^2+4a-12=0$ имеет единственный корень.

23В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2x^4+(a-2)x^3+2x^2+(a-2)x+2=0$ имеет не менее двух различных отрицательных корней.

24В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2x^4-(5a+2)x^3+2x^2-(5a+2)x+2=0$ имеет не менее двух различных положительных корней.

25В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x(x+1)(x+2)(x+3)=a$ имеет не менее трех различных отрицательных корней.

26В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x(x-1)(x-2)(x-3)=-a$ имеет не менее трех различных положительных корней.

27В (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$\left(\log_6(x+a)-\log_6(x-a)\right)^2-4a\left(\log_6(x+a)-\log_6(x-a)\right)+3a^2+4a-4=0$ имеет ровно два решения.

28В (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left((a-2)x^2+6x\right)^2-4\left((a-2)x^2+6x\right)+4-a^2=0$ имеет ровно два решения.

29B (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0$ имеет ровно четыре решения.

30B (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(\operatorname{tg}x+6)^2-\left(a^2+2a+8\right)(\operatorname{tg}x+6)+a^2(2a+8)=0$ имеет на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ ровно два решения.

31B. Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $5-4\sin^2 x-8\cos^2\frac{x}{2}=3a$ имеет хотя бы один корень.

32B. Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2-2\cos 2x=3a+4\sin x$ имеет хотя бы один корень.

33B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a\left(\cos^2 x-3\right)^2+2a+11\sin^2 x<44$ выполняется для любого действительного значения x.

34B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a\left(\sin^2 x-3\right)^2+2a+88>22\cos^2 x$ выполняется для любого действительного значения x.

35B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $5^x-(a-5)\cdot(0{,}2)^x+2\le a$ имеет хотя бы одно решение.

36B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^x-(a+2)\cdot(0{,}25)^x\le a+5$ имеет хотя бы одно решение.

37B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(ax^2+4x+a\right)$ выполняется для любого значения x.

38B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\log_{0{,}2}\left(4x^2+1\right)\le 2+\log_{0{,}2}\left(4ax^2-40x+a\right)$ выполняется для любого значения x.

39B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}x+2y+3z=x^2+16y^2,\\ x+4y+9z=a\end{cases}$ имеет единственное решение.

40B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+4y^2=3z, \\ x+2y+3z=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

41B (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(4\cos x-3-a)\cos x-2{,}5\cos 2x+1{,}5=0$ имеет хотя бы один корень.

42B (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{1-x}(a-x+2)=2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1;1)$.

43B (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\sin^2 x+2\cos x+a\right|=\sin^2 x+\cos x-a$ имеет на промежутке $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень.

44B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^x+(a-6)\cdot 2^x=(2+3|a|)\cdot 2^x+(a-6)(3|a|+2)$ имеет единственное решение.

45B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{4^{-x^2}-a\cdot 2^{1-x^2}+a}{2^{1-x^2}-1}=3$ имеет хотя бы одно решение.

46B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x^2+x)(x^2+5x+6)=a$ имеет ровно три корня.

47B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$ имеет четыре различных корня.

48B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\log_{0,5}(x^2+ax+1)<1$ выполняется для любого $x<0$.

49B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \log_3(y-3)-2\log_9 x=0, \\ (x+a)^2-2y-5a=0 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

50B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^x+a\cdot 25^x=3\cdot 10^x$ имеет хотя бы один корень.

51B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^x+a\cdot 49^x=4\cdot 14^x$ имеет хотя бы один корень.

52B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin^2 x+(a-2)^2\sin x+a(a-2)(a-3)=0$ на отрезке $[0;2\pi]$ имеет ровно три различных корня.

53B (ЕГЭ 2021). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|a-2|\cdot x^4-2ax^2+|a-12|=0$ имеет хотя бы два различных корня.

ОТВЕТЫ

1В. $a=-2$. **2В.** $a=3$. **3В.** $a\in\left(-\infty;\frac{5}{9}\right]\cup\{1;\,6\}$. **4В.** $a\in(-\infty;-6]\cup\{-4\}$. **5В.** $a\in\{-42\}\cup(-2;3)$. **6В.** $a\in\{-12\}\cup(6;\infty)$. **7В.** $a\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{43}}{3}\right]\cup[7;\infty)$. **8В.** $a\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right]\cup[5;\infty)$. **9В.** $a\in\left[-2;-\frac{2}{\sqrt{5}}\right]\cup\left[\frac{2}{\sqrt{5}};2\right]$. **10В.** $a\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$.

11В. $a\in\left(-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{13}-1}{4};\infty\right)$. **12В.** $a\in\left(\frac{6}{7};1\right)\cup(6;\infty)$. **13В.** $a\in\left(-\infty;\frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)\cup(2{,}5;\infty)$. **14В.** $a\in\left(-\infty;-9-\sqrt{89}\right)\cup(20;\infty)$. **15В.** $a\in[-2;\infty)$.

16В. $a\in[0{,}75;\infty)$. **17В.** $a\in(-\infty;-2]\cup\{0\}\cup[2;\infty)$. **18В.** $a\in(-\infty;-3]\cup\{0\}\cup[3;\infty)$. **19В.** $a\in\left(0;\frac{1}{36}\right)$. **20В.** $a\in\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **21В.** $a\in(-4;2]$.

22В. $a\in(-6;2]$. **23В.** $a\in(5;\infty)$. **24В.** $a\in(0{,}2;\infty)$. **25В.** $a\in\left(-1;\frac{9}{16}\right)$. **26В.** $a\in\left(-\frac{9}{16};1\right)$. **27В.** $a\in(-\infty;-2)\cup\left(\frac{2}{3};2\right)\cup(2;\infty)$. **28В.** $a\in(-\infty;-1)\cup\{0;2\}\cup(5;\infty)$.

29В. $a\in(-\infty;-2)\cup(2;3)\cup\left(3;\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{2};\infty\right)$. **30В.** $a\in\left(-\sqrt{6};-2\right)\cup(-2;-1)\cup\{4\}$.

31В. $a_1=-1,\ a_2=0,\ a_3=1$. **32В.** $a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=2$. **33В.** $a\in(-\infty;3)$. **34В.** $a\in(-6;\infty)$. **35В.** $a\in[4;\infty)$. **36В.** $a\in[-3;\infty)$. **37В.** $a\in(2;3]$. **38В.** $a\in(10;15]$.

39В. $a=-\frac{17}{48}$. **40В.** $a=-\frac{1}{2}$. **41В.** $a\in(-\infty;-6]\cup[0;\infty)$. **42В.** $a\in\left[-\frac{5}{4};-1\right)\cup(-1;1]$. **43В.** $a\in(-\infty;0]\cup\left\{\frac{1}{4}\right\}$. **44В.** $a\in\{-2;1\}\cup[6;\infty)$. **45В.** $a\in(-\infty;-3)\cup[-2;\infty)$. **46В.** $a=\frac{9}{16}$. **47В.** $a\in\left(0;\frac{1}{8}\right)$. **48В.** $a\in\left(-\infty;\sqrt{2}\right)$. **49В.** $a\in\left[-\frac{7}{3};6\right)$. **50В.** $a\in\left(-\infty;\frac{9}{4}\right]$. **51В.** $a\in(-\infty;4]$. **52В.** $a_1=0;\ a_2=2;\ a_3=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

53В. $a\in\left[\frac{12}{7};3\right]\cup[4;\infty)$.