ПРИМЕНЕНИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе будут рассмотрены уравнения и системы уравнений с параметрами, ключевым признаком которых является инвариантность. Типичные формулировки таких задач следующие: *«Найдите все значения параметра* ***a****, при которых уравнение (или система уравнений) имеет единственное решение».* Слово «единственное» в формулировке таких задач является ключевым. Оно, как правило, служит сигналом для проверки уравнения, неравенства или системы уравнений на инвариантность. Слово «инвариантность» означает «неизменность». В математике под инвариантностью понимается *неизменяемость каких-либо выражений с переменными или функций по отношению к каким-либо* **преобразованиям** *над этими самыми переменными*.

Самым простым примером инвариантности является четность функции: если $y = f(x)$ является четной функцией, то эта функция инварианта относительно замены x на $-x$, т.е. если значение x_0 является решением уравнения $f(x)=0$, то и значение $-x_0$ также будет являться его решением, поэтому чтобы уравнение $f(x)=0$ имело единственное решение, необходимо чтобы $x_0 = 0$.

Например, уравнение $f(x)+f(b-x)=0$ (где b – произвольное действительное число) не изменится от замены x на $b-x$, поэтому если x_0 является решением этого уравнения, то и $b-x_0$ также будет являться его решением, поэтому чтобы уравнение $f(x)+f(b-x)=0$ имело единственное решение, необходимо чтобы $x_0 = b - x_0$, т.е. $x_0 = \frac{b}{2}$.

Система уравнений может быть инвариантна относительно замены x на $-x$ (в этом случае для единственности решения необходимо чтобы $x=0$), замены y на $-y$ (в этом случае для единственности решения необходимо чтобы $y=0$), замены x на y, а y на x (в этом случае для единственности решения необходимо чтобы $x=y$).

Бывают и менее очевидные инвариантности нахождение которых является достаточно сложным процессом. Таким образом, если в формулировке задачи требуется найти значение параметра a, при которых решение единственное, нужно проверить не обладает ли уравнение, неравенство или система уравнений свойством инвариантности. В случае, если удалось найти замену в результате которой уравнение не изменилось, то следует решать задачу придерживаясь следующего алгоритма:

1) найти корень, который может являться единственным решением;

2) подставить найденный корень в исходное уравнение, неравенство или систему уравнений и найти соответствующие этому корню значения параметра. Казалось бы, параметры найдены и можно их записывать в ответ, но никто не гарантирует, что при этих значениях параметров решение будет единственным. Найденные на этом этапе значения параметра представляют собой лишь так называемое *необходимое* условие единственности решения, но, к сожалению, **не достаточное!;**

3) проверка на **достаточность**: каждое из найденных значений параметра подставляем в исходное уравнение, неравенство или систему уравнений. Решаем исходную задачу для каждого такого значения параметра и устанавливаем, сколько решений в каждом случае получается. Те значения параметра, при которых задача имеет более одного решения, отбрасываем.

Пункт 3 в подобных задачах зачастую наиболее трудоёмкий, потому что далеко не всегда при этом получаются уравнения и системы уравнений, решаемые стандартными алгебраическими преобразованиями. Часто приходится использовать свойства монотонности и ограниченности функции, рассмотренные в предыдущем разделе

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + 2 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если x_0 является решением исходного уравнения, то и $-x_0$ также является решением, т.е. уравнение инвариантно относительно замены x на $-x$. Для единственности решения необходимо выполнение условия $x_0 = 0$ (пункт 1). Подставляя это значение x в исходное уравнение, получим значение параметра $a = \frac{1}{\sin 1}$, которое является «кандидатом в ответ» (пункт 2). Подставим найденное значение параметра в исходное уравнение: $x^2 - \frac{2\sin(\cos x)}{\sin 1} + 2 = 0$. Осталось выяснить: имеет ли полученное уравнение еще корни кроме $x = 0$ (пункт 3)? Для этого перепишем последнее уравнение в виде: $x^2 + 2 = \frac{2\sin(\cos x)}{\sin 1}$. Левая часть этого уравнения принимает значения $[2;\infty)$. Разберемся с правой частью: $\cos x$ принимает значения $[-1;1]$, следовательно, $\sin(\cos x)$ принимает значения $[-\sin 1;\sin 1]$, а вся правая часть последнего уравнения принимает значения $[-2;2]$. Следовательно, последнее уравнение выполняется только в случае, если его левая и правая части равны 2, а это возможно только при $x = 0$. Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение только при $a = \frac{1}{\sin 1}$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a\left(x^2+2\right)=y-|x|+5, \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Р е ш е н и е . Заметим, что если пара чисел $(x_0;y_0)$ является решением данной системы, то пара $(-x_0;y_0)$ – тоже ее решение, т.е. система уравнений инвариантна относительно замены x на $-x$. Для единственности решения необходимо выполнение условия $x_0=0$ (пункт 1). Подставляя это значение x в исходную систему, получаем необходимые значения параметра $a=0$ и $a=5$, которые являются «кандидатами в ответ» (пункт 2).

Важно понимать, что условие $x_0=0$ является необходимым, но не является достаточным. Достаточность проверим подстановкой значений $a=0$ и $a=5$ в исходную систему (пункт 3).

При $a=0$ система принимает вид

$$\begin{cases} y=|x|-5, \\ x^2+y^2=25, \end{cases}$$

из которой следует три решения $(0;-5),(5;0),(-5;0)$.

При $a=5$ система принимает вид

$$\begin{cases} a\left(x^2+2\right)=y-|x|+5, \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5x^2+|x|+5, \\ y^2=25-x^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения $y\geq 5$, а из второго $|y|\leq 5$. Следовательно, пара чисел $(0;5)$ является единственным решением. Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a=5$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^4+(a-3)^2=|x-a+3|+|x+a-3|$$

имеет единственное решение.

Р е ш е н и е . Обозначим $a-3=b$, тогда уравнение примет следующий вид $x^4+b^2-|x-b|-|x+b|=0$. Рассмотрим функцию

$$f(x)=x^4+b^2-|x-b|-|x+b|$$

которая является четной. Действительно:

$$f(-x)=(-x)^4+b^2-|-x-b|-|-x+b|=x^4+b^2-|x+b|-|x-b|=f(x).$$

Следовательно, если x_0 является решением уравнения, то и $-x_0$ также является решением, т.е. уравнение инвариантно относительно замены x на $-x$. Для единственности решения необходимо выполнение условия $x_0=0$ (пункт 1). Подставляя это значение x в последнее уравнение, получим $b^2-2|b|=0$, откуда

$|b|(|b|-2)=0$, $b_1=0$, $b_2=2$, $b_3=-2$ (пункт 2). Осталось найденные значения b подставить в последнее уравнение и определить сколько оно имеет решений при каждом значении b (пункт 3). Если $b=0$, то получим уравнение $x^4-2|x|=0$, которое можно записать в виде $|x|^4-2|x|=0$ или $|x|(|x|^3-2)=0$, откуда $x_1=0,\ x_2=-\sqrt[3]{2},\ x_3=\sqrt[3]{2}$. Следовательно, при $b=0$ уравнение имеет три решения, поэтому это значение b не удовлетворяет условию задачи. Если $b=2$ или $b=-2$, то получим одно и то же уравнение $x^4+4-|x-2|-|x+2|=0$, которое решим методом интервалов. Если $x<-2$, то $x^4+4+x-2+x+2=0$ или $x^4+2x+4=0$. Нам требуется определить имеет ли последнее уравнение решения при $x<-2$. Переписав его в виде $x(x^3+2)+4=0$, можно сделать вывод, что множители x и x^3+2 при $x<-2$ отрицательны, поэтому $x(x^3+2)>0$ и при $x<-2$ решений нет. Если $-2\le x\le 2$, то $x^4+4+x-2-x-2=0$ или $x^4=0$, которое имеет единственное решение $x=0$, удовлетворяющее условию $-2\le x\le 2$. Если $x>2$, то $x^4+4-x+2-x-2=0$ или $x^4-2x+4=0$. Переписав его в виде $x(x^3-2)+4=0$, можно сделать вывод, что множители x и x^3-2 при $x>2$ положительны, поэтому $x(x^3-2)>0$ и при $x>2$ решений нет. Следовательно, при $b=2$ и $b=-2$ уравнение имеет одно решение. Возвращаясь к замене $a-3=b$, получаем $a_1=5$ и $a_2=1$.

<u>Пример 4 (**ЕГЭ 2018**).</u> Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x\,y=a^2-3a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Р е ш е н и е . Заметим, что если пара чисел $(x_0;y_0)$ является решением данной системы, то пары $(y_0;x_0)$, $(-x_0;-y_0)$, $(-y_0;-x_0)$ – тоже ее решения, т.е. система уравнений будет иметь 4 решения. Поскольку по условию задачи решений должно быть два, то полученные пары должны совпадать. Всего возможно 6 вариантов. Рассмотрим каждый случай отдельно:

1) если $(x_0;y_0)=(y_0;x_0)$, то $x_0=y_0$. Тогда система уравнений примет вид: $\begin{cases} 2x^2=a^2, \\ x^2=a^2-3a. \end{cases}$ Из которой: $a^2-6a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=6. \end{array}\right.$ При $a=0$ система примет вид $\begin{cases} x^2+y^2=0, \\ xy=0 \end{cases}$ которая имеет одно решение $x=y=0$, т.е. $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. При $a=6$ система примет вид $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ xy=18 \end{cases}$

которая имеет два решения $\left(\sqrt{18};\sqrt{18}\right)$, $\left(-\sqrt{18};-\sqrt{18}\right)$, т.е. $a=6$ удовлетворяет условию задачи;

2) если $\left(x_0;y_0\right)=\left(-x_0;-y_0\right)$, то $x_0=y_0=0$. Тогда $a=0$, это значение параметра рассмотрено в первом случае;

3) если $\left(x_0;y_0\right)=\left(-y_0;-x_0\right)$, то $x_0=-y_0$. Тогда система уравнений примет вид: $\begin{cases}2x^2=a^2,\\ -x^2=a^2-3a.\end{cases}$ Из которой: $3a^2-6a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0,\\ a=2.\end{array}\right.$ Значение $a=0$ рассмотрено в первом случае. При $a=2$ система примет вид $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ xy=-2\end{cases}$ которая имеет два решения $\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, т.е. $a=2$ удовлетворяет условию задачи;

4) если $\left(y_0;x_0\right)=\left(-x_0;-y_0\right)$, то $x_0=-y_0$. Смотри третий случай;

5) если $\left(y_0;x_0\right)=\left(-y_0;-x_0\right)$, то $x_0=y_0=0$. Смотри второй случай.

6) если $\left(-x_0;-y_0\right)=\left(-y_0;-x_0\right)$, то $x_0=y_0$. Смотри первый случай.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a=2$ и $a=6$.

Приведенный выше пример показывает, что применять инвариантность можно не только в задачах, где решение должно быть единственным.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$9^{-x+1}\cdot 3^{x^2}+a^3+5a^2+a+\sqrt{2}=\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}+3$$

имеет единственное решение.

Р е ш е н и е . Обозначим $b=a^3+5a^2+a$ и преобразуем уравнение следующим образом:

$$9\cdot 3^{-2x}\cdot 3^{x^2}+b+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi x}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi x}{4}\right)+3$$

$$9\cdot 3^{x^2-2x}+b+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}\right)+3$$

$$9\cdot 3^{x(x-2)}+b+\sqrt{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+3$$

$$9\cdot 3^{x(x-2)}+b+\sqrt{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)+3.$$

Последнее уравнение не изменится, если заменить x на $2-x$. Действительно:

$$9\cdot 3^{(2-x)((2-x)-2)}+b+\sqrt{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(2-x-1)\right)+3$$

$$9\cdot 3^{(2-x)(-x)}+b+\sqrt{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)+3$$

$$9\cdot 3^{x(x-2)}+b+\sqrt{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)+3.$$

Следовательно, оно инвариантно относительно замены x на $2-x$. Для единственности решения необходимо выполнение условия $x=2-x$, откуда $x=1$ (пункт 1). Подставляя это значение x в последнее уравнение, получим $3+b+\sqrt{2}=\sqrt{2}+3$, откуда $b=0$ (пункт 2). Подставим $b=0$ в последнее уравнение и выясним сколько оно имеет решений при этом значении b (пункт 3):

$$3\cdot 3^{(x-1)^2}+\sqrt{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)+3.$$

Оценим левую и правую части последнего уравнения (см. предыдущий раздел). Так как $(x-1)^2\geq 0$ и значения косинуса $[-1;1]$, то левая часть принимает значения $\left[3+\sqrt{2};\infty\right)$, а правая $\left[3-\sqrt{2};3+\sqrt{2}\right]$. Значит, последнее уравнение, согласно утверждению 3 из предыдущего раздела, сводится к системе уравнений

$$\begin{cases}3\cdot 3^{(x-1)^2}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2},\\ \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)+3=3+\sqrt{2}.\end{cases}$$

Корнем первого уравнения является $x=1$, который удовлетворяет и второму уравнению. Следовательно, при $b=0$ уравнение имеет одно решение. Возвращаясь к замене $b=a^3+5a^2+a$ найдем значение параметра a: $a^3+5a^2+a=0$ откуда $a=0$ и $a=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$.

<u>Пример 6.</u> Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}2^x+2^{\frac{1}{x}}=\left(|a|-3\right)^2+\cos^2 y+4,\\ \left(y^2-\pi y+\frac{\pi^2}{4}\right)z^2+z^2-\frac{2}{9}a^2z+a+4=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Р е ш е н и е . Система уравнений не изменится при замене x на $\dfrac{1}{x}$, т.е. система уравнений инвариантна относительно замены x на $\dfrac{1}{x}$. Следовательно, исходная система уравнений будет иметь единственное решение, если $x = \frac{1}{x}$ (пункт 1), откуда $x = \pm 1$. Рассмотрим каждый корень отдельно (пункт 2). При $x = -1$ первое уравнение системы примет вид $\left(|a| - 3\right)^2 + \cos^2 y + 3 = 0$, которое не имеет решений, т.к. первые два слагаемых в левой части неотрицательны и левая часть принимает значения $\left[3; \infty\right)$, т.е. не может равняться 0. Значит при $x = -1$ система уравнений не имеет решений. Рассмотрим случай когда $x = 1$. В этом случае первое уравнение системы примет следующий вид $\left(|a| - 3\right)^2 + \cos^2 y = 0$. Последнее равенство может выполниться, только если $\begin{cases} |a| - 3 = 0, \\ \cos^2 y = 0 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} a = \pm 3, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z. \end{cases}$ Теперь рассмотрим случай когда $a = 3$. При этом значение параметра второе уравнение примет вид: $\left(y^2 - \pi y + \frac{\pi^2}{4}\right) z^2 + z^2 - 2z + 7 = 0$ или $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 z^2 + \left(z - 1\right)^2 + 6 = 0$. Последнее уравнение не имеет решений, т.к. первые два слагаемых в левой части неотрицательны и левая часть принимает значения $\left[6; \infty\right)$, т.е. не может равняться 0. Следовательно, при $a = 3$ исходная система уравнений не имеет решений. Рассмотрим случай $a = -3$ и $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z$. При этом значение параметра второе уравнение примет вид: $\left(y^2 - \pi y + \frac{\pi^2}{4}\right) z^2 + z^2 - 2z + 1 = 0$ или $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 z^2 + \left(z - 1\right)^2 = 0$. Последнее равенство возможно только при $y = \frac{\pi}{2}$ и $z = 1$. При этом $y = \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет решениям $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z$ которое появится при $k = 0$. Таким образом, единственным допустимым значением параметра является $a = -3$. Проверим достаточность подстановкой значения $a = -3$ в исходную систему уравнений (пункт 3). При $a = -3$ исходная система примет следующий вид $\begin{cases} 2^x + 2^{\frac{1}{x}} = \cos^2 y + 4, \\ \left(y^2 - \pi y + \frac{\pi^2}{4}\right) z^2 + z^2 - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2^x + 2^{\frac{1}{x}} = \cos^2 y + 4, \\ \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 z^2 + \left(z - 1\right)^2 = 0. \end{cases}$ Решением второго уравнения последней системы является $y = \frac{\pi}{2}$ и $z = 1$. При $y = \frac{\pi}{2}$

первое уравнение последней системы примет вид $2^x + 2^{\frac{1}{x}} = 4$ решением которого является $x = 1$. Осталось ответить на следующий вопрос: имеет ли последнее уравнение другие решения кроме $x = 1$? Если $x < 0$, то каждое из слагаемых в левой части этого уравнения меньше 1, поэтому отрицательных корней это уравнение не имеет. Оценим левую часть этого уравнения при $x > 0$. Для этого воспользуемся тем, что среднее арифметическое двух неотрицательных выражений всегда не меньше их среднего геометрического т.е. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (или $a + b \geq 2\sqrt{ab}$) при $a, b \geq 0$ и при этом равенство достигается, если $a = b$. Значит $2^x + 2^{\frac{1}{x}} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{\frac{1}{x}}} = 2\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}}$. Так как, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$ (см. предыдущий раздел), то $2\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}} \geq 4$, откуда $2^x + 2^{\frac{1}{x}} \geq 4$. Следовательно, уравнение $2^x + 2^{\frac{1}{x}} = 4$ будет иметь решения только в том случае, когда каждое из двух неравенств, которые использовались для оценки левой части, обращаются в равенство, т.е. $x = \frac{1}{x}$ и $2^x = 2^{\frac{1}{x}}$. Единственным положительным корнем является $x = 1$. Таким образом, исходная система имеет единственное решение $\left(1; \frac{\pi}{2}; 1\right)$ при $a = -3$.

Задачи этого раздела для самостоятельного решения мы решили не разбивать на несколько уровней сложностей и всем им присвоили уровень B.

Уровень B

1B. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.

2B. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $2x^2 - a\,\mathrm{tg}(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.

3B. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $a^2 + a\sqrt{3} + 6 + \sin^2 ax = 6\cos x$ имеет единственный корень.

4B. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $a^2 + a\sqrt{2} + 4 + \sin^2 ax = 4\cos x$ имеет единственный корень.

5B. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $3^x + 3^{2-x} = a^2 - 6a + 11$ имеет единственный корень.

6В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2^x + 2^{4-x} = a^2 - 3a + 10$ имеет единственный корень.

7В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 + \left(\dfrac{4}{x}\right)^3 + 16 = 2a^2$ имеет единственный корень.

8В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 + \left(\dfrac{9}{x}\right)^3 + 54 = 3a^2$ имеет единственный корень.

9В (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (a-3)^2 = |x - a + 3| + |x + a - 3|$ имеет единственный корень.

10В (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (a-4)^2 = |x - a + 4| + |x + a - 4|$ имеет единственный корень.

11В (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x - a + 5| + |x + a - 5|$ имеет единственный корень.

12В (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 + (a-2)^4} = |x - a + 2| + |x + a - 2|$ имеет единственный корень.

13В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$ имеет единственный корень.

14В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\pi^2(x-2)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 25a^3 = 0$ имеет единственный корень.

15В. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \le \frac{a + x^2 + 2\log_5\left(a^2 - 4a + 5\right)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + a + 1 + \log_5^2\left(a^2 - 4a + 5\right)}$$

состоит из одной точки.

16В. Найдите все неотрицательные значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \le \frac{2a + x^2 - 4\log_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log_{\frac{1}{3}}^2\left(4a^2 - 4a + 9\right)}$$

состоит из одной точки.

17В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x-1)^2 - 2^{1-a}\right| + |x-1| + (1-x)^2 + 2^{a-1} = 4 + 4^a$ имеет единственный корень.

18B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x+1)^2-2^{-a-1}\right|+|x+1|+(1+x)^2+2^{a+1}=0,25+4^a$ имеет единственный корень.

19B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-1, \\ x=(a+2)y^2+2ay+a-1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

20B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=(a+2)x^2-(2a+1)x+a-3, \\ x=(a+2)y^2-(2a+1)y+a-3 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

21B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2-2(a+1)x+a^2-12=2y, \\ y^2-2(a+1)y+a^2-12=2x \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

22B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y, \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

23B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a\left(x^4+1\right)=y-|x|+2, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

24B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a\left(x^4+1\right)=y-|x|+3, \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

25B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+3|x|-2=5y+3x^2-5a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

26B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+2|x|-1=3y+2x^2-3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

27B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} ax^2+a+2|\sin x|=y+1, \\ \operatorname{tg}^2 x+y^2=1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

28B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} ax^2+a+3|\sin x|=y+2, \\ \sin^2 x+y^2=4 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

29B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4z, \\ x+y+2z=2a \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

30B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=9z, \\ x+y=3a+3z \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

31B. Найдите все значения параметров a и b, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=b, \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

32B. Найдите все значения параметров a и b, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 4xyz+x=a, \\ 8x^2yz+b=x, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

33B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \left(3-2\sqrt{2}\right)^y+\left(3+2\sqrt{2}\right)^y-3a=x^2+6x+5, \\ y^2-\left(a^2-5a+6\right)x^2=0, \\ -6\le x\le 0 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

34B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x-5=a+2y+y^2, \\ x^2+\left(2-a-a^2\right)y^2=0, \\ -2\le y\le 0 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

35B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^5+(6-x)^5=2y^5, \\ (x-3)^2+(y-3)^2+z^2+a^2=4, \\ 12yz^2-2(a-2)y^2z+18=9a \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

36B. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^{11}+(8-x)^{11}=2y^{11}, \\ (x-4)^2+(y-4)^2+z^2+a^2=25, \\ 20yz^2-(a-5)y^2z+40=8a \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

37В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2^x + 2^{\frac{4}{x}} = \left(a^2-4\right)^2 + y^2 + 8, \\ |\,y\,|\,z^4 + 2z^2 - a^2 z + a + 4 = 0 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

38В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3^x + 3^{\frac{1}{x}} = \left(a^2-9\right)^2 + y^2 + 6, \\ y^2 z^4 + z^2 - 2a^2 z + a + 84 = 0 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

39В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x+2)^2 + 2(a+2y) + y^2 + z^2 = 0, \\ \left(2 + xyz^2(a+2)\sqrt{1-2xy}\right)\left(a\sin^2 z + x + y\right) = 0, \\ (xy+1)\operatorname{tg}(x+y) + \cos(x-y) = 1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

40В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (xy-2)\cdot\sin(y-x) + z = z\cdot\cos(x+y), \\ (x-1)^2 + y^2 + 2y + z^2 + a = 0, \\ \left(a\sin^2 z + y - x\right)\left((a+1)\lg(xy+1) + 1\right) = 0 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

41В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2^{-x^2}\cdot 4^x + \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} = a^3 - 3a^2 + 2a + 2 + \sqrt{2}$ имеет единственный корень.

42В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9^{1-x}\cdot 3^{x^2} + a^3 - 5a^2 + 4a + \sqrt{2} = \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} + 3$ имеет единственный корень.

43В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \sqrt{|\,x-3\,|} + \sqrt{|\,y-1\,|} = 4, \\ x^2 - 6x + y^2 - 2y = 16a^2 - 10 \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

44В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \sqrt{5|\,x\,|} + \sqrt{|\,y+3\,|} = 1, \\ 25x^2 + y^2 + 6y = 16a - 9 \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

45В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2\sin\left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{a+1} - \frac{2}{a+1}\right) - a\sqrt{4x^2 + 8 - 8x} = 3 + \arcsin|1-x|$ имеет единственный корень.

46В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$ имеет нечетное число корней.

47В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^4-(a-1)\sqrt{a+3}\cdot y+a^4+2a^3-9a^2-2a+8=0, \\ y=\sqrt{a+3}\cdot x^2 \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

48В (ЕГЭ 2021). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2^{\ln y}=4^{|x|}, \\ \log_2\left(x^4y^2+2a^2\right)=\log_2\left(1-ax^2y^2\right)+1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

49В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x|+\left|\frac{2x-1}{3x-2}\right|=a$ имеет ровно три решения.

50В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x|+\left|\frac{x+1}{3x-1}\right|=a$ имеет ровно три решения.

ОТВЕТЫ

1В. $a_1=0;\ a_2=4\sin 1.$ **2В.** $a_1=0;\ a_2=\operatorname{tg}1.$ **3В.** $a=-\sqrt{3}.$ **4В.** $a=-\sqrt{2}.$ **5В.** $a_1=1;\ a_2=5.$ **6В.** $a_1=1;\ a_2=2.$ **7В.** $a_1=-4;\ a_2=0;\ a_3=4.$ **8В.** $a_1=-6;\ a_2=0;\ a_3=6.$ **9В.** $a_1=1;\ a_2=5.$ **10В.** $a_1=2;\ a_2=6.$ **11В.** $a_1=3;\ a_2=7.$ **12В.** $a_1=0;\ a_2=4.$ **13В.** $a_1=-\frac{2}{3};\ a_2=0.$ **14В.** $a_1=-\frac{2}{5};\ a_2=0.$ **15В.** $a=4.$ **16В.** $a_1=0;\ a_2=1.$ **17В.** $a=-1.$ **18В.** $a=1.$ **19В.** $a_1=-2;\ a_2=\frac{9}{8}.$ **20В.** $a_1=-\frac{7}{3};\ a_2=-2.$ **21В.** $a=-4.$ **22В.** $a=-2.$ **23В.** $a=4.$ **24В.** $a=6.$ **25В.** $a=\frac{2}{5}.$ **26В.** $a=\frac{1}{3}.$ **27В.** $a=2.$ **28В.** $a=4.$ **29В.** $a=-\frac{1}{2}.$ **30В.** $a=\frac{1}{2}.$ **31В.** $a=-2,\ b=-2.$ **32В.** $a=1,\ b=1.$ **33В.** $a_1=-1,\ a_2=2.$ **34В.** $a_1=-3,\ a_2=-2.$ **35В.** $a=2.$ **36В.** $a=5.$ **37В.** $a=-2.$ **38В.** $a=-3.$ **39В.** $a=-2.$ **40В.** $a=-1.$ **41В.** $a_1=0;\ a_2=1;\ a_3=2.$ **42В.** $a_1=0;\ a_2=1;\ a_3=4.$ **43В.** $a=\pm\sqrt{2},\ a=\pm 4.$ **44В.** $a_1=\frac{1}{128},\ a_2=\frac{1}{16}.$ **45В.** $a=3.$ **46В.** $a=\pm 1.$ **47В.** $a=2.$ **48В.** $a=1.$ **49В.** $a_1=2,\ a_2=\frac{2}{3}.$ **50В.** $a=2.$