

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1–10.

1. После выпуска акций их цена сначала дважды повышалась на 10%, а затем снизилась на 20% и составила 484 рубля за штуку. Какова была начальная цена одной акции?

2. Решите уравнение $\frac{15x^3 - 23x^2 + 9x - 1}{\sqrt{3x^2 - 10x + 3}} = 0$.

3. Остатки при делении натурального числа n на 4 и 6 в сумме дают 8. Найдите все возможные остатки при делении числа n на 12.

4. Решите неравенство

$$\frac{x + 22}{|x| - 21} \leq -1.$$

5. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 60 и 58, а средняя линия равна 5.

6. Рассматриваются натуральные числа вида $2^a 3^b 5^c 7^d$, где a, b, c, d — попарно различные цифры. Сколько среди них кратных 60?

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Градусные меры дуг AB и CD равны соответственно 45° и 75° . Диагонали AC и BD пересекаются в точке E . В треугольник AED вписана окружность с центром в точке O , $OE = 6$. Найдите радиус окружности с центром в точке O .

8. Один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $\sqrt{7} - 2$. Найдите p и q , если известно, что они рациональны.

9. Незнайка помогает Знайке написать книгу. Знайка диктует весь текст. После этого Знайка случайным образом выбирает 3 написанные страницы. Если оказывается, что Незнайка ошибся хотя бы в двух из них, то Знайка заставляет его переписывать весь текст. Найдите вероятность того, что Незнайке придётся переделывать работу, если вероятность, с которой он может ошибиться на одной странице, равна 0,2.

10. Найдите все значения a , при которых прямая, задаваемая уравнением $ax + (1 - a)y = 2a$, имеет хотя бы одну общую точку с границей квадрата с вершинами $(0; 0), (1; 0), (1; 1), (0; 1)$.

Часть 2

К задачам 11–12 приведены рукописные тексты решений.

- 1) Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.
- 2) Предложите правильное решение.

11. Одна снегоуборочная машина могла бы убрать улицу за 1 час, а вторая — за 45 минут. Начав убирать снег одновременно, две машины проработали вместе 20 минут, после чего первую машину вызвали на другой объект. Через какое время вторая машина закончила уборку снега?

Скорость уборки снега I машины равна 1 ул./ч, II — $\frac{3}{4}$ ул./ч.
 При совместной работе скорость уборки равна $1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ ул./ч. За 20 мин они убирают $\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{12}$ ул. Осталось убрать $\frac{5}{12}$ ул. II машина делает это за $\frac{5}{12} : \frac{3}{4} = \frac{5}{9}$ ч, т.е. за $\frac{5}{9} \cdot 60 = 15$ мин.
 Ответ: 15 мин.

12. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Докажите, что $AB > AL$ и $BC > CL$.

1) Предположим, что $AB < AL$ и $BC < CL$.
 2) Тогда по теореме о соотношении между сторонами и углами в Δ -ке имеем:
 $\angle BLC < \angle LBC$
 $\angle BLC < \angle LBA$
 $\Rightarrow \angle BLC + \angle BLC < \angle BLC + \angle LBA$, но такое быть не может, т.к. $\angle BLC + \angle LBA = 180^\circ$, а $2x < 180^\circ$. Противоречие.
 $\Rightarrow AB > AL, BC > CL$.

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

.....

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;

✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

- 500 р.
- $\frac{1}{5}$.
1 балл — ответ отличается от верного включением ровно одного из чисел $\frac{1}{3}$ или 1.
11.
1 балл — верно найдены остатки при делении числа n на 4 и на 6.
0 баллов — верный ответ получен в результате рассмотрения частных случаев.
- $(-21; 21)$.
1 балл — ответ отличается от верного включением точек ± 21 .
- 288.
- $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 = 3136$.
1 балл — верно найдены возможные диапазоны значений для всех переменных a, b, c, d .
1 балл — найдено количество чисел ($8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 10 = 6480$) без учёта различности цифр a, b, c, d .
2 балла — выписано произведение $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7$ (или другое равное ему выражение, вытекающее из хода решения), но его значение найдено неверно или не найдено.
- $3\sqrt{3}$.
1 балл — верно найден $\angle AED = 120^\circ$ и указано, что точка O лежит на биссектрисе этого угла.
- $p = 4, q = -3$.
1 балл — получен верный ответ, при этом в решении указано, что второй корень $-\sqrt{7} - 2$, но не доказано, что других вариантов нет.
- $0,104 = \frac{13}{125}$.

1 балл — при составлении выражения $0,2^3 + 3 \cdot 0,8 \cdot 0,2^2$ (или выражения $1 - 0,8^3 - 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8^2$) не учтено число комбинаций, приведшее к потере множителя, равного 3.

2 балла — верно и обоснованно выписано выражение $0,2^3 + 3 \cdot 0,8 \cdot 0,2^2$ (или другое равное ему выражение, вытекающее из хода решения), но его значение найдено неверно или не найдено.

- $a \in [0; \frac{1}{2}]$.
1 балл — задача сведена к рассмотрению взаимного расположения прямой, проходящей через точку $(2; 0)$, и квадрата.
1 балл — ответ отличается от верного исключением одной или двух граничных точек.

В задачах 11–12:

✓ 2 балла выставляется за описание всех ошибок, указание способа исправить ошибки и получить верное решение, возможно, с мелкими недочётами;

✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны все ошибки, или приведено верное решение;

✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

- Ошибка 1.* Скорость уборки снега второй машины равна не $\frac{3}{4}$, а $\frac{4}{3}$ ул/ч. *Ошибка 2.* В последнем действии решения часы в минуты переведены неверно.

Решение. Рассмотрим скорость уборки снега. У первой машины она равна 1 ул/ч, у второй $\frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$ ул/ч, а при совместной работе скорость уборки снега равна $1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$ ул/ч. За 20 минут машины уберут $\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$ улицы. Значит, останется убрать $\frac{2}{9}$ улицы. У второй машины на это уйдёт $\frac{2}{9} : \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$ часа, или 10 минут.

1 балл — верно указана **хотя бы одна из** ошибок в представленном решении, верное решение задачи не представлено или представлено, но не доведено до верного ответа.

- В п. 1 представленного решения неверно построено отрицание к доказываемому утверждению (правильное отрицание: $AB \leq AL$ **или** $BC \leq CL$). Ошибка также может быть описана по-другому: после слова «Противоречие» неверно сформулировано отрицание к предположению (должно быть $AB \geq AL$ **или** $BC \geq CL$). Таким образом, рассуждение не является искомым доказательством.

Решение. По теореме о внешнем угле треугольника BLC имеем $\angle ALB = \angle LBC + \angle BCL > \angle LBC = \angle ABL$. Следовательно, $AB > AL$. Аналогично, $BC > CL$.