Вариант 1
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13,4	0,33	1	6	4,5	42	0,05	4	11	0,42	-6

Решения заданий 12-18

Задача 12

Решение.

а) Используя формулу $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$, заменим выражение в скобках на $\cos x$, получаем однородное тригонометрическое уравнение первой степени:

$$\sin x + \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует $\sin x = 0$, что невозможно в силу основного тригонометрического тождества. Значит, на множестве корней уравнения $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Составим двойное неравенство: $\pi \leq -\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \frac{5\pi}{2}$, откуда $\frac{5}{4} \leq k \leq 2\frac{3}{4}$. Следовательно, $k = 2$. Поэтому на данном отрезке получаем единственный корень $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

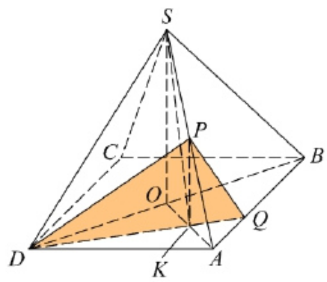
Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 13

Решение.

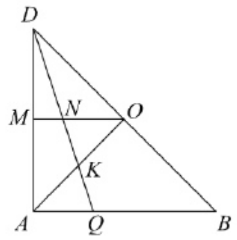
а) Пусть O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра AD, отрезки AO и DQ пересекаются в точке K, а отрезки MO и DQ пересекаются в точке N. Тогда MO — средняя линия в треугольнике ADB, а NO — средняя линия в треугольнике QDB. Значит,



$$NO = \frac{QB}{2} = AQ.$$

Таким образом, треугольники AKQ и OKN равны. Следовательно, точка K — середина отрезка AO. Значит, прямая PK содержит среднюю линию треугольника ASO, поэтому она перпендикулярна плоскости основания пирамиды $SABCD$. Плоскость DPQ содержит прямую PK, поэтому она тоже перпендикулярна плоскости основания.

б) Пусть сторона основания пирамиды равна $3a$, а высота пирамиды равна h. Тогда площадь сечения DSB равна



$$\frac{BD \cdot SO}{2} = \frac{3\sqrt{2}ah}{2} = 6,$$

откуда $ah = 2\sqrt{2}$.Площадь сечения DPQ равна

$$\frac{DQ \cdot PK}{2} = \frac{\sqrt{DA^2 + AQ^2} \cdot SO}{4} = \frac{\sqrt{10}ah}{4} = \sqrt{5}.$$

Ответ: б) $\sqrt{5}$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 14

Решение.

Заметим, что $3^{2x+1}=3\cdot 9^x$, а $3^x\cdot 2^{x+1}=2\cdot 6^x$, и разделим числитель и знаменатель дроби на выражение 4^x, отличное от нуля при всех x:

$$\frac{6\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x-7\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x+2}{3\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x}\leqslant 1.$$

Пусть $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, тогда:

$$\frac{6t^2-7t+2}{3t^2-2t}\leqslant 1\Leftrightarrow\frac{3t^2-5t+2}{3t^2-2t}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{(t-1)(3t-2)}{t(3t-2)}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}t\neq\frac{2}{3},\\ \frac{t-1}{t}\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<t<\frac{2}{3},\\ \frac{2}{3}<t\leqslant 1.\end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной, имеем:

$$\left[\begin{array}{l}0<\left(\frac{3}{2}\right)^x<\frac{2}{3},\\ \frac{2}{3}<\left(\frac{3}{2}\right)^x\leqslant 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x<\left(\frac{3}{2}\right)^{-1},\\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{3}{2}\right)^x\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^0\end{array}\right.\underset{\frac{3}{2}>1}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}x<-1,\\ -1<x\leqslant 0.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(-1;0]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 15

Решение.

Найдем прибыль за первый год после окончания строительства. При $p=10$ для прибыли получаем величину $10x-(0,5x^2+2x+6)$ или $-0,5x^2+8x-6$. Наибольшее значение данного выражения достигается при производстве $x=8$ тыс. ед. продукции и составляет $-0,5\cdot 8^2+8\cdot 8-6=26$ млн. руб. Продолжая вычисления для $p=11$, 12 и 13, можно найти прибыль в последующие годы и убедиться, что через 4 года общая прибыль составит 159 млн. руб. Приведем решение в чуть более общем виде.

Ежегодно максимальная прибыль является наибольшим значением квадратичной функции $f(x)=-0,5x^2+(p-2)x-6$, достигается в точке $p-2$ и равна

$$f(p-2)=-0,5(p-2)^2+(p-2)(p-2)-6=0,5(p-2)^2-6.$$

Тогда общая прибыль за n первых лет составит:

1 год: $0,5\cdot 8^2-6=26$ млн. руб.,

2 год: $0,5\cdot 9^2-6=34,5$ млн. руб. (общая 60,5 млн. руб.),

3 год: $0,5\cdot 10^2-6=44$ млн. руб. (общая 104,5 млн. руб.),

4 год: $0,5\cdot 11^2-6=54,5$ млн. руб. (общая 159 млн. руб.).

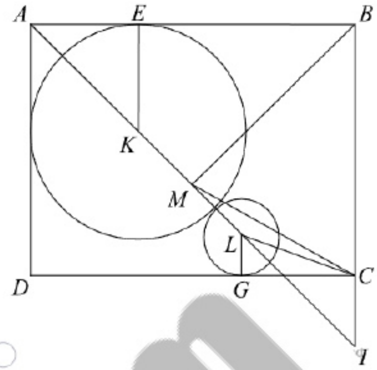
Тем самым, строительство окупится за 4 года.

Ответ: за 4 года.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Решение.



а) Пусть первая окружность касается стороны AB в точке E, первая окружность касается второй окружности в точке H, вторая окружность касается стороны CD в точке G. Проекция отрезка KL на сторону AD равна

$$AD - KE - LG = \frac{3\sqrt{2}}{2} = KL \cdot \cos 45^\circ.$$

Это означает, что прямая KL составляет с прямой AD угол 45°. Угол KAD из очевидных соображений тоже равен 45°, а значит, точки A, K, L лежат на одной прямой.

б) Пусть прямая AK и прямая BC пересекаются в точке I. Тогда ABI — равнобедренный треугольник и

$$CI = AB - BC = 3 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Обозначим h расстояние от точки C до прямой AI. Тогда

$$h = CI \cdot \sin 45^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Заметим, что

$$ML = AL - AM = AK + KL - \frac{1}{2}AI = 2\sqrt{2} + 3 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}.$$

Теперь можно найти площадь треугольника CLM:

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot ML = \frac{1}{2} \cdot (3 - \sqrt{2}) \cdot \left(3 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = \frac{12\sqrt{2}-15}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{2}-15}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 17

Решение.

Пары $(x;\ y)$ дающие решение системы, должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} 3x+7y>0, \\ 2x+y>0, \\ 2x+y\neq 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим

$$3x+7y=(2x+y)^3.$$

Осталось заметить, что тогда

$$6x^2+17xy+7y^2=(3x+7y)\cdot(2x+y)=(2x+y)^4.$$

Уравнение $(2x+y)^4=a$ при условиях $2x+y>0$ и $2x+y\neq 1$ имеет при $a>0,\ a\neq 1$ решение $2x+y=\sqrt[4]{a}$. Тогда

$$3x+7y=\sqrt[4]{a^3}$$

и из полученной системы находим

$$x=\frac{7\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a^3}}{11},\ y=\frac{2\sqrt[4]{a^3}-3\sqrt[4]{a}}{11}.$$

Ответ: при $a\in(-\infty;\ 0]\cup\{1\}$ решений нет, при $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$ $(x;\ y)=\left(\dfrac{7\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a^3}}{11};\dfrac{2\sqrt[4]{a^3}-3\sqrt[4]{a}}{11}\right)$.

Критерии оценивания ответа на задание С5	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	4
Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробелы, либо вычислительную ошибку или описку.	3
Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.	2
Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.	1
Все прочие случаи.	0
Максимальное количество баллов	4

Задача 18

Решение.

а) Да, например, если он прошел 4 уровня на 2 звезды и 2 уровня на 3 звезды, поскольку $4 \cdot 60 + 2 \cdot 45 = 330$.

б) Допустим, он прошел x уровней на 1 звезду, y — на две и z уровней на три звезды. Тогда $x + 2y + 3z = 13$ и $75x + 60y + 45z = 435$, откуда делением на 15 получаем $5x + 4y + 3z = 29$. Складывая это уравнение с первым, получим $6x + 6y + 6z = 42$, откуда $x + y + z = 7$. Это и есть число пройденных уровней.

в) Допустим, он прошел x уровней на 1 звезду, y — на две и z уровней на три звезды. Тогда $x + 2y + 3z = 32$ и $2000x + 3000y + 5000z = 50000$, а найти нужно наименьшее значение выражения $75x + 60y + 45z = 15(5x + 4y + 3z)$. Из первого уравнения имеем $x = 32 - 3z - 2y$, подставляя во во второе $2x + 3y + 5z = 50$, последовательно находим:

$$2(32 - 3z - 2y) + 3y + 5z = 50 \Leftrightarrow y + z = 14 \Leftrightarrow y = 14 - z.$$

Тогда $x = 32 - 3z - 2(14 - z) = 4 - z$, следовательно, $0 \leqslant z \leqslant 4$.

Наконец, $5x + 4y + 3z = 5(4 - z) + 4(14 - z) + 3z = 76 - 6z$. Чтобы это выражение было минимально, следует взять максимально возможное z, то есть $z = 4$. Тогда $x = 0$, $y = 10$ и $15(5x + 4y + 3z) = 15 \cdot 52 = 780$ рублей.

Ответ: а) да, б) 7, в) 780 рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: − обоснованное решение пункта *а*; − обоснованное решение пункта *б*; − искомая оценка в пункте *в*; − пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

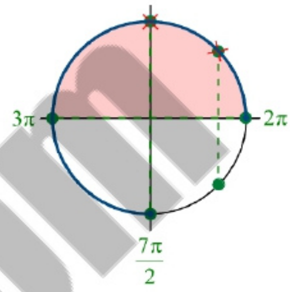
Вариант 2
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	0,14	71	0,25	10	2	2	18	61	5	-6

Решения заданий 12-18
Задача 12

Решение.

а) Получаем:



$$\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0,\\ -\sin x\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\cos x-\sqrt{2}\cos^2 x=0,\\ \sin x\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\cos x(1-\sqrt{2}\cos x)=0,\\ \sin x\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\leqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x=0,\\ \sin x=0,\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k.\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем числа: $2\pi, 3\pi$ и $\frac{7\pi}{2}$.

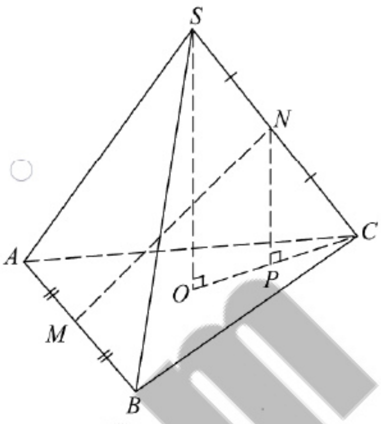
Ответ: а) $\left\{\pi k, -\frac{\pi}{4}+2\pi k, -\frac{\pi}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $2\pi,\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 13

Решение.

а) Пусть SO — высота пирамиды. Проекция отрезка AS на плоскость ABC — это отрезок AO. Проекция отрезка SC на плоскость ABC — это отрезок OC. Следовательно, проекция точки N это середина отрезка OC, точка P. Точки C, P, O, M лежат на одной прямой, причем $CP = PO = OM$, следовательно, $MP = CO = AO$. Таким образом, проекции отрезков MN и SA на плоскость основания пирамиды равны.



б) Обозначим высоту пирамиды за h. Тогда $NP = \frac{h}{2}$. По пункту а) имеем:

$$AS^2 - SO^2 = MN^2 - NP^2,$$

следовательно,

$$64 - h^2 = 25 - \frac{h^2}{4} \Leftrightarrow h = 2\sqrt{13};$$

$$AO^2 = AS^2 - SO^2 = 64 - 52 = 12 \Rightarrow AO = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Тогда $AB = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$.

Таким образом, для искомого объема получаем $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ABC} = 6\sqrt{39}$.

Ответ: б) $6\sqrt{39}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 14

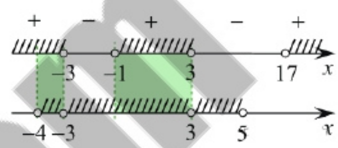
Решение.

Решим неравенство методом рационализации:

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} - \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{25-x^2}{16} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{25-x^2}{16}-1\right)\left(\frac{24+2x-x^2}{14}-\frac{25-x^2}{16}\right) > 0, \\ 25-x^2>0, \\ 24+2x-x^2>0 \\ \frac{25-x^2}{16} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{9-x^2}{16}\right)\left(\frac{-x^2+16x+17}{112}\right) > 0, \\ -5<x<5, \\ -4<x<6, \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-9)(x^2-16x-17) > 0, \\ -4<x<5, \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<x<-3, \\ -1<x<3. \end{array} \right.$$



Ответ: $(-4; -3) \cup (-1; 3)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 15

Решение.

Пусть кредит взят на n лет, сумма кредита равна $S = 5$ млн руб. Составим таблицу по данным задачи.

Номер года	Долг в январе (с учетом процентов), руб.	Платёж, руб.	Долг в июле (после платежа), руб.
			S
1	$1,2S$	$0,2S+\frac{S}{n}$	$S-\frac{S}{n}$
2	$1,2\left(S-\frac{S}{n}\right)$	$0,2\left(S-\frac{S}{n}\right)+\frac{S}{n}$	$S-\frac{S}{n}-\frac{S}{n}$
...	...	...	...
$n-1$	...	...	$\frac{S}{n}$
n	$1,2\cdot\frac{S}{n}$	$0,2\cdot\frac{S}{n}+\frac{S}{n}$	0

Суммируем все выплаты:

$$B_n = \underbrace{\left(0,2S+\frac{S}{n}\right)}_{\text{первая выплата}} + \underbrace{\left(0,2\cdot\frac{(n-1)S}{n}+\frac{S}{n}\right)}_{\text{вторая выплата}} + \ldots + \underbrace{\left(0,2\cdot\frac{S}{n}+\frac{S}{n}\right)}_{n\text{−я выплата}} =$$

$$= n\cdot\frac{S}{n} + \underbrace{0,2\cdot\frac{S+\frac{S}{n}}{2}\cdot n}_{\text{сумма арифм. прогрессии}} = S + 0,1S\cdot(n+1).$$

По условию сумма выплат составит 7,5 млн рублей:

$$5 + 0,1\cdot 5\cdot(n+1) = 7,5 \Leftrightarrow 0,5\cdot(n+1) = 2,5 \Leftrightarrow n+1 = 5 \Leftrightarrow n = 4$$

Значит, кредит планируется взять на 4 года.

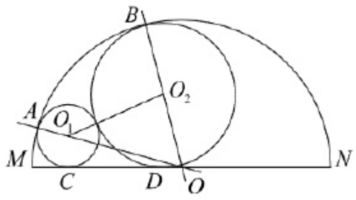
Ответ: 4 года.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Решение.

а) Заметим, что точка касания двух окружностей лежит на их линии центров. Пусть O — середина диаметра MN, тогда A лежит на прямой OO_1, точка B лежит на OO_2. Значит, прямые AO_1, BO_2 и MN пересекаются в одной точке (точке O). Что и требовалось доказать.



б) Пусть C и D — точки касания соответственно первой и второй окружностей с прямой MN. Тогда из прямоугольной трапеции CO_1O_2D получаем:

$$CD^2 = (2+5)^2 - (5-2)^2 = 40.$$

Обозначим искомый радиус R, тогда из треугольника O_1CO получаем

$$CO^2 = (R-2)^2 - 2^2 = R^2 - 4R.$$

Аналогично,

$$DO^2 = (R-5)^2 - 5^2 = R^2 - 10R.$$

Точки касания могут лежать по одну сторону от центра большей окружности или по разные стороны. В каждом из этих случаев $DO = |CO - CD|$, то есть $DO^2 = (CO - CD)^2$, откуда:

$$R^2 - 10R = R^2 - 4R - 2\sqrt{40\cdot(R^2-4R)} + 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{40\cdot(R^2-4R)} = 3R + 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40R^2 - 160R = 9R^2 + 120R + 400 \Leftrightarrow R = \frac{140+80\sqrt{5}}{31}.$$

Ответ: б) $\frac{140+80\sqrt{5}}{31}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 17

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y+2a)^2=(1+a)^2,\\(x+2a)^2+(y-2a)^2=(2+a)^2.\end{cases}$$

При $a=-1$ имеем систему

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=0,\\(x-2)^2+(y+2)^2=1.\end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Следовательно, $a=-1$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a=-2$ имеем систему

$$\begin{cases}(x+2)^2+(y-4)^2=1,\\(x-4)^2+(y+4)^2=0.\end{cases}$$

Эта система тоже решений не имеет. Следовательно, и $a=-2$ не удовлетворяет условию задачи.

Если $a\neq-1$, $a\neq-2$, то каждое уравнение системы есть уравнение окружности. В этом случае система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих окружностей равно сумме или разности их радиусов.

Пусть $a\neq-1$, $a\neq-2$. Расстояние O_1O_2 между центрами $O_1(a,\,-2a)$ и $O_2(-2a,\,2a)$ равно $O_1O_2=\sqrt{9a^2+16a^2}=5|a|$, а радиусы $R_1=|a+1|$ и $R_2=|a+2|$. Решим два уравнения: (1) $O_1O_2=R_1+R_2$ и (2) $O_1O_2=|R_1-R_2|$.

Уравнение (1) имеет вид $5|a|=|a+1|+|a+2|$; уравнение (2) имеет вид $5|a|=\big||a+1|-|a+2|\big|$. Решением уравнения (1) являются числа 1 и $-\frac{3}{7}$. Решением уравнения (2) являются числа $\pm\frac{1}{5}$.

Ответ: $-\frac{3}{7}$; $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$; 1.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задача 18

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому

$$9k-18l+0\cdot m=-5(k+l+m).$$

а) Заметим, что в левой части каждое слагаемое делится на 9, поэтому $k+l+m$ — количество целых чисел — делится на 9. По условию $27<k+l+m<45$, поэтому

$$k+l+m=36.$$

Таким образом, написано 36 чисел.

б) Приведём равенство $9k-18l=-5(k+l+m)$ к виду

$$13l=14k+5m.$$

Так как $m\geqslant 0$, получаем, что $13l\geqslant 14k$, откуда $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) (оценка) Подставим $k+l+m=36$ в правую часть равенства

$$9k-18l=-5(k+l+m):\ 9k-18l=-180,$$

откуда

$$k=2l-20.$$

Так как $k+l\leqslant 36$, получаем:

$$3l-20\leqslant 36,\ 3l\leqslant 56,\ l\leqslant 18,\ k=2l-20\leqslant 16;$$

то есть положительных чисел не более 16.

в) (пример) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 16. Пусть на доске 16 раз написано число 9, 18 раз написано число -18 и два раза написан 0.

Тогда

$$\frac{9\cdot 16-18\cdot 18}{36}=\frac{144-324}{36}=-5$$

указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 36; б) отрицательных; в) 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Вариант 3
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0,375	64	1	1,5	-3	60	22	3,6	0,0296	10

Решения заданий 12-18
Задача 12

а) Решите уравнение $27^x - 5\cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4;\ \log_3 10]$.

Решение.

а) Разложим левую часть на множители:

$$27^x - 5\cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0 \Leftrightarrow 27^x - 5\cdot 9^x - 9\cdot 3^x + 45 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9^x(3^x-5) - 9(3^x-5) = 0 \Leftrightarrow (3^x-5)(9^x-9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 5, \\ 9^x = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3 5, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

б) Поскольку $1 < \log_3 4 < \log_3 5 < \log_3 10$, отрезку $[\log_3 4;\ \log_3 10]$ принадлежит только корень $\log_3 5$.

Ответ: а) $\{1;\ \log_3 5\}$, б) $\log_3 5$.

Примечание.

Можно было ввести замену $t = 3^x$, получить уравнение и решить его разложением на множители:

$$t^3 - 5t^2 - 9t + 45 = 0 \Leftrightarrow (t^2-9)(t-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5, \\ t = \pm 3. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем решение.

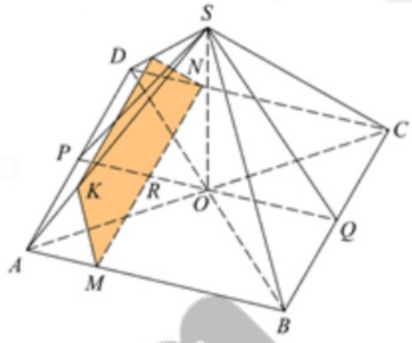
Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 13

Решение.

а) Пусть O — центр основания пирамиды (рис. 1), тогда

$$AO = 8\sqrt{2},\ AS = \sqrt{AO^2 + OS^2} = 12.$$

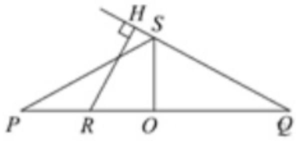


Заметим, что $AM:AB = AK:AS$, значит, прямые MK и BS параллельны. Кроме того, прямые MN и BC также параллельны, поэтому плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Пусть точки P, Q и R — середины отрезков AD, BC и MN соответственно. Плоскости MNK и SBC параллельны, а плоскость SPQ перпендикулярна прямой BC, поэтому искомое расстояние равно расстоянию от точки R до прямой QS. Опустим из точки R перпендикуляр RH на прямую SQ (рис. 2). Тогда

$$RH = RQ \cdot \sin\angle PQS = MB \cdot \frac{SO}{SQ} = MB \cdot \frac{SO}{\sqrt{SO^2 + OQ^2}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 14

Решение.

Заметим под знаком корня полный квадрат:

$$\sqrt{4x^4-4x^2+1}=\sqrt{\left(2x^2-1\right)^2}=\left|2x^2-1\right|.$$

Возведём в квадрат обе части полученного неравенства и рассмотрим разность квадратов левой и правой частей:

$$\left|x^2-3x+1\right|\geqslant\left|2x^2-1\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+1\right)^2\geqslant\left(2x^2-1\right)^2\Leftrightarrow\left(x^2-3x+1\right)^2-\left(2x^2-1\right)^2\geqslant 0\Leftrightarrow\left(3x^2-3x\right)\left(-x^2-3x+2\right)\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2+3x-2\right)\leqslant 0\Leftrightarrow x(x-1)\left(x-\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\leqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\leqslant x\leqslant 1.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[-\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ 0\right]\cup\left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2};\ 1\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 15

Решение.

Пусть в банк был положено x миллионов рублей. После двух лет сумма вклада составит:

$$1,1 \cdot 1,1x = 1,21x.$$

В начале третьего года вклад пополняется на 3 миллиона. Затем банк начисляет проценты и сумма вклада станет равна:

$$1,1(1,21x+3) = 1,331x+3,3.$$

В начале четвертого года вклад пополняется еще раз на 3 миллиона. После начисления процентов за четвертый год сумма вклада станет равна:

$$1,1(1,331x+6,3) = 1,4641x+6,93.$$

Это превосходит внесенную вкладчиком сумму $x+3+3$ млн руб. на $0,4641x+0,93$ млн руб.

По условию задачи

$$0,4641x+0,93 > 5,$$

откуда

$$x > \frac{4,07}{0,4641} = \frac{40700}{4641} = 8,7\ldots$$

Наименьшее целое решение неравенства равно 9. Тем самым наименьший первоначальный вклад, при котором начисленные проценты за весь срок будут более 5 миллионов рублей, составляет 9 миллионов рублей.

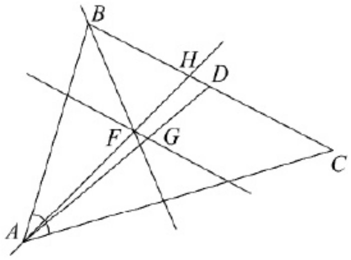
Ответ: 9 млн руб.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Решение.

а) Пусть в треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке H, а биссектрису угла B в точке пересекаются в точке F. По свойству биссектрисы $BH : HC = AB : AC = 2 : 3$. Аналогично, по свойству биссектрисы, только для треугольника ABH получаем:



$$AF : FH = AB : BH = AB : \frac{2}{5}BC = 4 : 2 = 2 : 1.$$

Пусть теперь AD — медиана треугольника ABC, а G — точка пересечения медиан. Известно, что $AG : GD = 2 : 1$. Тогда треугольники AFG и AHD подобны по двум сторонам и углу между ними. Значит, прямые FG и HD параллельны, то есть прямые FG и BC параллельны. Что и требовалось доказать.

б) Запишем теорему косинусов для треугольников ABH и AHC, приняв угол AHB за α:

$$4^2 = 2^2 + AH^2 - 2\cdot 2\cdot AH\cdot\cos\alpha,$$
$$6^2 = 3^2 + AH^2 - 2\cdot 3\cdot AH\cdot\cos(\pi-\alpha).$$

Отсюда

$$\frac{6^2-3^2-AH^2}{2\cdot 3\cdot AH} = \frac{AH^2+2^2-4^2}{2\cdot 2\cdot AH}.$$

Упрощая, получаем:

$$4(27-AH^2) = 6(AH^2-12) \Leftrightarrow AH^2 = 18 \Leftrightarrow AH = 3\sqrt{2}.$$

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 17

Решение.

Решение 1. Перепишем данное уравнение в виде $(1+\sin x)^4-4(1+\sin x)=3-a-a^2$ и положим $1+\sin x=t$, где $0\leqslant t\leqslant 2$. Тогда исходное уравнение принимает вид $t^4-4t=3-a-a^2$.

Найдем множество значений функции $f(t)=t^4-4t$ на отрезке [0; 2].

Так как $f'(t)=4t^3-4=4(t^3-1)$, то $f'(t)<0$ на промежутке [0; 1) и $f'(t)>0$ промежутке (1; 2]. Значит, функция убывает на отрезке [0; 1] и возрастает на отрезке [1; 2]. Поскольку $f(0)<f(2)$, то множество значений функции на отрезке [0; 2] — отрезок [f(1); f(2)], т. е. отрезок $[-3; 8]$. Таким образом, уравнение $f(t)=3-a-a^2$ не имеет решений на отрезке [0; 2] тогда и только тогда, когда выполняются условия $3-a-a^2>8$ или $3-a-a^2<-3$.

$$\left[\begin{array}{l} a^2+a+5<0, \\ a^2+a-6>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-3, \\ a>2. \end{array}\right.$$

Решение 2. Положим $1+\sin x=t$, где $0\leqslant t\leqslant 2$, и рассмотрим функцию $f(t)=t^4-4t+a^2+a-3$. Так как ее производная $f'(t)=4t^3-4=4(t^3-1)$, то $f'(t)<0$ на промежутке [0; 1) и $f'(t)>0$ промежутке (1; 2]. Значит, на промежутке [0; 2) функция имеет единственный экстремум — минимум $f_{\min}=f(1)=a^2+a-6$. Так как $f(0)<f(2)$, уравнение $t^4-4t+a^2+a-3=0$ не имеет решений на отрезке [0; 2] тогда и только тогда, когда выполняются условия $f(2)<0$ или $f_{\min}>0$. Таким образом, приходим к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a^2+a+5<0, \\ a^2+a-6>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-3, \\ a>2. \end{array}\right.$$

Решение 3. Построить эскиз графика функции $f(t)=t^4-4t$ на отрезке [0; 2] (см. решение 1) и исследовать взаимное расположения графика этой функции и прямой $y=3-a-a^2$.

Ответ: $a<-3$, $a>2$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задача 18

Решение.

а) Да, например, если числа написаны так: 3, 1, 2, 4, 6, 5, 7, 8, 9.

б) Предположим, что это возможно. Тогда между любыми двумя ближайшими из делящихся на 3 чисел 3, 6 и 9 должны стоять ровно три других числа. Значит, число 3 стоит на первом, пятом или девятом месте. Также среди этих чисел ровно 4 простых: 2, 3, 5 и 7. Простые и составные числа должны чередоваться. Следовательно, число 3 стоит на втором, четвёртом, шестом или восьмом месте. Пришли к противоречию. Значит, числа не могли быть расставлены указанным образом.

в) Обозначим через n сумму всех чисел, стоящих на нечётных местах. Поскольку сумма всех чисел строки равна 45, произведение суммы всех чисел, стоящих на нечётных местах, и суммы всех чисел, стоящих на чётных местах этой строки, равно

$$n\cdot(45-n)=\left(\frac{45}{2}\right)^2-\left(\frac{45}{2}\right)^2+45n-n^2=\left(\frac{45}{2}\right)^2-\left(n-\frac{45}{2}\right)^2.$$

При всех натуральных n это произведение не превосходит

$$\left(\frac{45}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=22\cdot 23=506.$$

Пусть числа расставлены так: 2, 1, 3, 6, 4, 7, 5, 8 и 9. Тогда $n=2+3+4+5+9=23$ и $n\cdot(45-n)=506$.

Следовательно, наибольшее значение, которое может принимать произведение суммы всех чисел, стоящих на нечётных местах, и суммы всех чисел, стоящих на чётных местах этой строки, равно 506.

Ответ: а) Да; б) нет; в) 506.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: − обоснованное решение пункта *а*; − обоснованное решение пункта *б*; − искомая оценка в пункте *в*; − пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4