Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Найдите корень уравнения

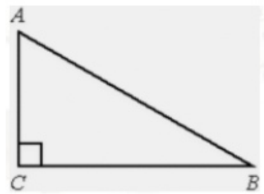
$\log_3(x+4) = \log_3 16.$

Ответ: ____________________________.

2 Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Сапфир» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Сапфир» начнёт игру с мячом не более одного раза.

Ответ: ____________________________.

3 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = 0{,}8$. Найдите $\sin B$.



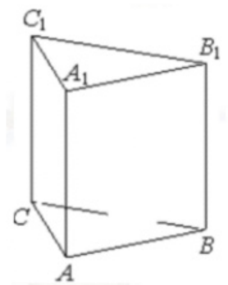
Ответ: ____________________________.

4 Найдите значение выражения

$\sqrt{108}\cos^2\dfrac{\pi}{12}-\sqrt{27}$.

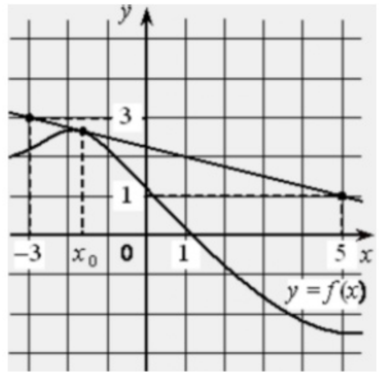
Ответ: ___________________________.

5 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, C, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Площадь основания призмы равна 7, а боковое ребро равно 9.



Ответ: ___________________________.

6 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

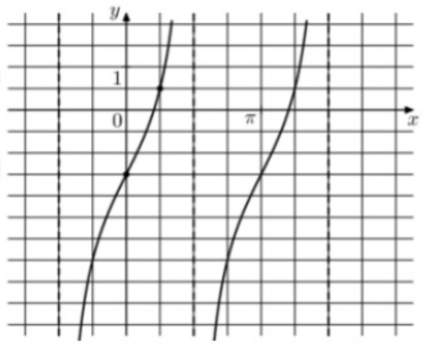
7 При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 6{,}4\cdot 10^6$ Па $\cdot$ м^5, где p — давление в газе (в Па), V — объём газа (в м^3), $k=\frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в м^3) будет занимать газ при давлении p, равном $2\cdot 10^5$ Па.

Ответ: ___________________________.

8 Моторная лодка прошла против течения реки 187 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a\,\mathrm{tg}\,x + b$. Найдите b.



Ответ: ___________________________.

10 Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,09. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: ___________________________.

11 Найдите наименьшее значение функции

$y = 3x^2 - 10x + 4\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{10}{11}; \frac{12}{11}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - 6\sin^2 x\right) = x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

13 Основание пирамиды $PABCD$ – трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.

14 Решите неравенство

$(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 < 11\log_2^2 x - 22\log_2 x - 24.$

15 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – целое число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.
б) Найдите площадь треугольника COD, где O – центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD – диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a-1}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

18 а) Приведите пример семизначного числа, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 426, 786.
б) Существует ли девятизначное число, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 238, 435, 567, 791?
в) Найдите наименьшее число, из которого можно получить все числа от 1 до 40 включительно, вычёркивая из него цифры.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	12
2	0,5
3	0,6
4	4,5
5	42
6	-0,25
7	8
8	14
9	-1,5
10	0,9919
11	4
12	а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$ б) $\frac{17\pi}{6};\ \frac{19\pi}{6}$
13	6
14	$\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup(8;16)$
15	8
16	$18\sqrt{3}$
17	$\left(1;\frac{5}{4}\right)$
18	а) например, 1427863 б) нет в) 1231234056789

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

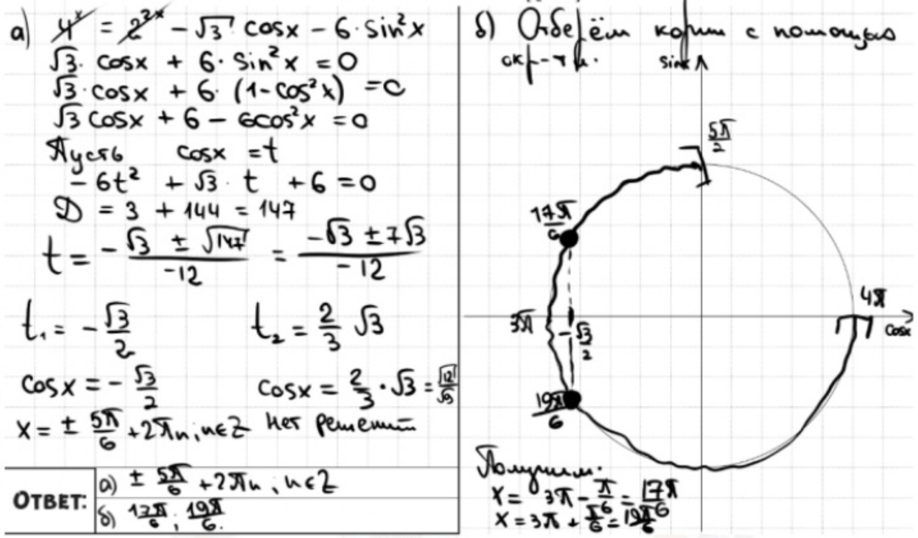
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

12 а) Решите уравнение

$$\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - 6\sin^2 x\right) = x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Источники:
Основная волна 2017



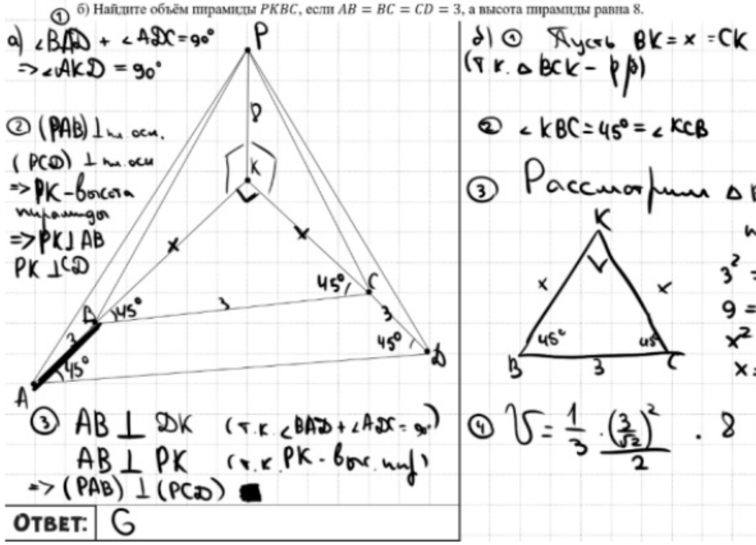
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 Основание пирамиды $PABCD$ − трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Гордин #14 2019
Основная волна 2017



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

14 Решите неравенство

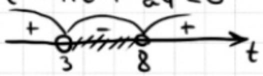
$(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 < 11\log_2^2 x - 22\log_2 x - 24.$

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Семёнов 2018
Основная волна (Резерв) 2015

$(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 < 11(\log_2^2 x - 2\log_2 x) - 24$

Пусть $\log_2^2 x - 2\log_2 x = t$

$t^2 - 11t + 24 < 0$

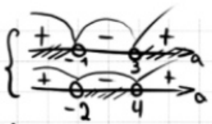


$3 < t < 8$

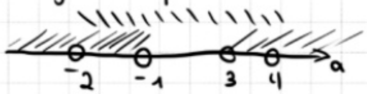
$\begin{cases} t > 3 \\ t < 8 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 > 0 \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x - 8 < 0 \end{cases}$

Пусть $\log_2 x = a$

$\begin{cases} a^2 - 2a - 3 > 0 \\ a^2 - 2a - 8 < 0 \end{cases}$



Найдём пересечение:



$-2 < a < -1$ $\quad$ $3 < a < 4$

$-2 < \log_2 x < -1$ $\quad$ $3 < \log_2 x < 4$

$\log_2 \frac{1}{4} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$ $\quad$ $\log_2 8 < \log_2 x < \log_2 16$

$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ $\quad$ $8 < x < 16$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup (8; 16)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – **целое** число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

Источники:
Ященко 2018 (36 вар)
Основная волна (Резерв) 2020
Досрочная волна 2016
Основная волна (Резерв) 2016

Пусть 1 янв 2021 года – день откр. вклада

31 дек – день начисл. %

Дата	Сумма вклада
1 янв 21	10
31 дек 21	$10 \cdot 1{,}1$
1 янв 22	ничего не происходит
31 дек 22	$10 \cdot 1{,}1^2$
1 янв 23	$10 \cdot 1{,}1^2 + x$
31 дек 23	$10 \cdot 1{,}1^3 + 1{,}1x$
1 янв 24	$10 \cdot 1{,}1^3 + 1{,}1x + x$
31 дек 24	$10 \cdot 1{,}1^4 + 1{,}1^2x + 1{,}1x$

$10 \cdot 1{,}1^4 + 1{,}1^2x + 1{,}1x - 10 - 2x > 7$

$14{,}641 + 2{,}31x - 2x - 10 - 7 > 0$

$0{,}31x > 2{,}359 \quad | \cdot 1000$

$310 \cdot x > 2359$

$x > \frac{2359}{310}$

$x > 7\frac{189}{310}$

$\Rightarrow x_{наим} = 8$

Ответ: 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

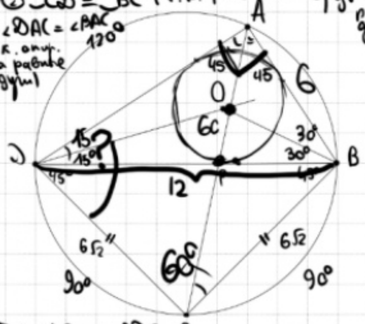
б) Найдите площадь треугольника COD, где O – центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD – диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Основная волна 2015

а) ① $\angle ADB = \angle ACB$ (опираются на $\smile AB$)

② $\smile CD = \smile BC$ (т.к. равные хорды стягивают равные дуги)

③ $\angle DAC = \angle BAC$ (т.к. опир. на равные дуги)



$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADP$ (по 2 углам)

$\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PD}$ $\Big|\cdot AP$, $:BC$

$\frac{AB \cdot \cancel{AP}}{\cancel{AP} \cdot BC} = \frac{\cancel{BC} \cdot AP}{PD \cdot \cancel{BC}}$ ■

б) ① $\angle BAD = 90°$, $\angle BCD = 90°$ (опир. на диаметр)

② AP – биссектриса $\triangle ABD$

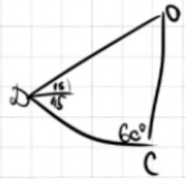
③ $BD = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} = 12$

$AB = 6$

$\Rightarrow \angle ADB = 30°$

$\angle ADO = 15° = \angle BDO$

④ Рассм. $\triangle COD$:



$\angle DCO = \angle ABD = 60°$ (опир. на одну дугу)

$\Rightarrow \triangle COD$ – равност.

$\Rightarrow S_{COD} = \frac{\sqrt{3}}{4}(6\sqrt{2})^2 = 18\sqrt{3}$

Ответ: $18\sqrt{3}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a-1}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

7DD7DB

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

Пусть $\sqrt{2^x - a} = t$, $t > 0$

Выразим x:

$2^x - a = t^2$

$2^x = t^2 + a$

$x = \log_2(t^2 + a)$

Уравнение $t + \frac{a-1}{t} = 1$ должно иметь два различных полож. корня t

$\frac{t^2 - t + a - 1}{t} = 0$ $\Big| \cdot t$, т.к. $t > 0$

$t^2 - t + a - 1 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot (a-1) = 1 - 4a + 4 = 5 - 4a$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5-4a}}{2}$

$\begin{cases} D > 0 \\ t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} ① \ 5 - 4a > 0 \\ ② \ \frac{1 + \sqrt{5-4a}}{2} > 0 \\ ③ \ \frac{1 - \sqrt{5-4a}}{2} > 0 \quad |\cdot 2 \end{cases}$

① $a < \frac{5}{4}$

② $5 - 4a \geq 0$, $a \leq \frac{5}{4}$

③ $1 - \sqrt{5-4a} > 0$

$\sqrt{5-4a} < 1$

$0 \leq 5 - 4a < 1$ $\Big| -5$

$-5 \leq -4a < -4$ $\Big| \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$

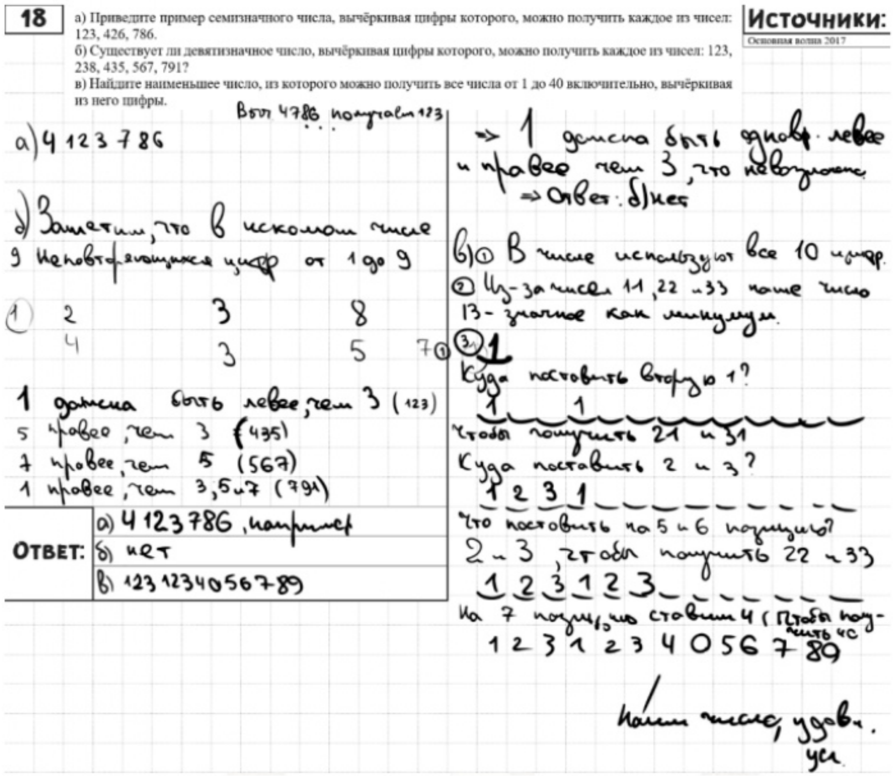
$\frac{5}{4} \geq a > 1$

$1 < a \leq \frac{5}{4}$

Найдём пересечение:

Ответ: $\left(1; \frac{5}{4}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *а*, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *а*	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.