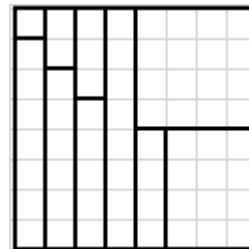


XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения и критерии оценки заданий регионального этапа, 1 день

1. Как без остатка разрезать клетчатый квадрат размером 8×8 клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек. (И. Рубанов)



Решение. Например, так, как показано на рисунке справа.

Критерии. Изображён или описан соответствующий условиям задачи способ разрезания: 7 баллов.

Указаны прямоугольники, на которые действительно можно разрезать квадрат с соблюдением условий задачи, но способ разрезания не изображен и не описан: 3 балла.

2. Учитель придумал ребус, заменив в примере $a+b=c$ на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. (например, если $a=23$, $a b=528$, то $c=551$, и получился, с точностью до выбора букв, ребус $AB+BAГ=BBД$). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы c . (И. Богданов)

Ответ. 10. Решение. Если ребус имеет вид $A+B=AB$, то $A=1$, так как $A+B < 20$, и $B=9$, так как иначе сумма $A+B$ — однозначное число. Таким образом, при $c=10$ по ребусу может однозначно восстанавливаться исходный пример $1+9=10$. Если же $c < 10$, то ребус имеет вид $A+B=B$, и определить, был ли это пример $1+2=3$, пример $1+3=4$ или любой из десятков других подобных примеров, не удастся.

Критерии. Только ответ 10: 0 баллов.

Дан ответ, указан вид ребуса $A+B=AB$, дальнейшего содержательного продвижения нет: 1 балл.

Указан вид ребуса $A+B=AB$, доказано, что он имеет единственное решение, дальнейшего содержательного продвижения нет: 3 балла.

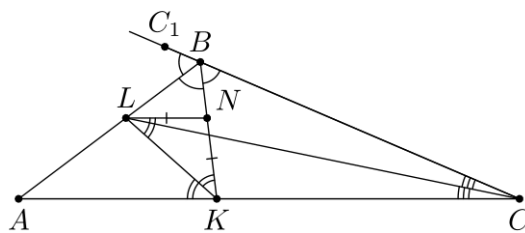
Показано, что ребус вида $A+B=B$ имеет больше одного решения, дальнейшего содержательного продвижения нет: 3 балла.

Дан ответ, указан вид ребуса $A+B=AB$, показано, что ребус вида $A+B=B$ имеет больше одного решения, единственность решения ребуса $A+B=AB$ не доказана: 4 балла.

Дан ответ, указан вид ребуса $A+B=AB$, показано, что ребус вида $A+B=B$ имеет больше одного решения, единственность решения ребуса $A+B=AB$ доказана с погрешностями: 5–6 баллов.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL . На отрезке BK отмечена точка N так, что $LN \parallel AC$. Оказалось, что $NK=LN$. Найдите величину угла ABC . (А. Кузнецов)

Ответ. 120° . Решение. В равнобедренном треугольнике LNK $\angle KLN = \angle LKN$. Кроме того, равны углы KLN и LKA как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых LN и AC . Таким образом, $\angle KLN = \angle LKA$, то есть луч KL — биссектриса угла AKB . Следовательно, лежащая на нём точка L равноудалена от прямых KA и KB . Кроме того, она равноудалена от прямых $CA=KA$ и CB , так как лежит на биссектрисе угла ACB .



Значит, точка L равноудалена от прямых CB и KB , и потому должна лежать на биссектрисе того из углов, образованных этими прямыми, в котором она содержится. Это угол KBC_1 , где C_1 — точка на продолжении отрезка CB за точку B , а его биссектрисой должен быть луч $BL=BA$. Отсюда получаем, что $\angle ABC_1 = \angle ABK = \angle CBK$. Так как эти три угла вместе составляют развёрнутый угол, то каждый из них равен 60° , откуда $\angle ABC = \angle ABK + \angle CBK = 120^\circ$.

Критерии. Показано, что KL — биссектриса угла AKB , дальнейшего содержательного продвижения нет: 1 балл.

Показано, что точка L равноудалена от прямых CB , CA и KB (или что точка L является центром вневписанной окружности треугольника AKB), дальнейшего содержательного продвижения нет: 3 балла.

4. Числа $1, 2, \dots, 1000$ разбили на два множества по 500 чисел: красные k_1, k_2, \dots, k_{500} и синие s_1, s_2, \dots, s_{500} . Докажите, что количество таких пар m и n , у которых разность $k_m - s_n$ дает остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар m и n , у которых разность $s_n - k_m$ дает остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются все возможные разности, в том числе и отрицательные.

Напомним, что остатком от деления целого числа a на 100 называется разность между числом a и ближайшим числом, не большим a и делимым на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен $2022 - 2000 = 22$, а остаток от деления числа -11 на 100 равен $-11 - (-100) = 89$. (Е. Бакаев)

Решение. Выпишем на доске все числа от 1 до 1000, и будем проводить стрелку от числа a к числу b , если разность $a-b$ дает остаток 7 при делении на 100. Тогда в каждое число будет входить 10 стрелок и из каждого числа будет выходить 10 стрелок. Значит, стрелок с синим началом столько же, сколько стрелок с синим концом. Удалим все стрелки, у которых как начало, так и конец синие. Тогда получится, что стрелок с синим началом и красным концом столько же, сколько стрелок с красным началом и синим концом, что и требовалось доказать.

5. При каком наибольшем n существует выпуклый n -угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений? (И. Рубанов)

Ответ. При $n = 7$. **Решение.** *Пример.* Правильный семиугольник. У него диагонали ровно двух видов: соединяющие вершины через одну и через две. *Оценка.* Пусть AB — сторона выпуклого многоугольника M , у которого есть диагонали только двух возможных длин x и y . Тогда для всякой вершины C , не смежной с A и B , стороны CA и CB треугольника ACB могут равняться только x и y . Выбор длин этих сторон однозначно определяет вершину C , так как она должна лежать с той же стороны от прямой AB , что и весь многоугольник M . Но таких комбинаций сторон есть только четыре: $CA = CB = x$; $CA = CB = y$; $CA = x, CB = y$; $CA = y, CB = x$. При этом из двух первых комбинаций возможна только одна, так как иначе соответствующие вершины C_1 и C_2 многоугольника M лежали бы на серединном перпендикуляре к стороне AB , что противоречило бы выпуклости M : та из вершин C_1 и C_2 , которая ближе к AB , оказалась бы внутри треугольника с вершинами в A, B и другой из этих вершин. Таким образом, у многоугольника M не больше трёх вершин, не смежных с вершинами A и B , то есть всего у него не более 7 вершин.

Критерии. Только ответ 7: 0 баллов.

Дан верный ответ и приведён пример семиугольника, длины диагоналей которого принимают только два различных значения, содержательного продвижения в доказательстве оценки нет: 1 балл.

XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения и критерии оценки заданий регионального этапа, 2 день

6. Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 — простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022. (Н. Агаханов)

Решение. Пусть наши числа равны $k, k+1$ и $k+2$, и ни одно из них не делится на 2022. Тогда если остаток от деления числа k на 2022 равен $r > 0$, то остатки от деления на 2022 чисел $k+1$ и $k+2$ равны, соответственно, $r+1$ и $r+2$, а сумма трёх остатков равна составному числу $3r+3 = 3(r+1)$. Противоречие.

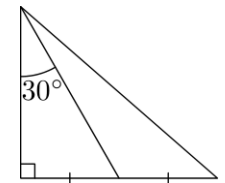
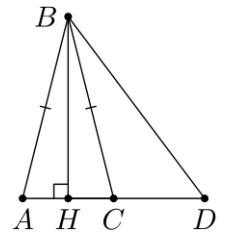
Замечание. Описываемая в условии задачи ситуация возможна. Если первое (наименьшее) из чисел делится на 2022, то числа дают соответственно остатки 0, 1 и 2 при делении на 2022, сумма которых равна простому числу 3.

Критерии. За отсутствие объяснения, почему описываемая в условии задачи ситуация возможна, оценка не снижается.

Если в решении, аналогичном приведенному выше, считается, что остатки от деления на 2022 трёх последовательных целых чисел равны $k, k+1$ и $k+2$, без оговорки, что ни одно из данных чисел не делится на 2022, оно оценивается из 4 баллов.

7. Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведенных из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника? (Н. Агаханов)

Ответ. Существует. **Решение.** Возьмём треугольник ABC , где $AB = BC$ и высота BH , проведенная из вершины B , равна $2AC$ (очевидно, такой существует). На продолжении стороны AC за точку C отложим отрезок $CD = AC$. В треугольнике ABD высота BH равна стороне $AD = 2AC$, а медиана BC равна стороне AB . Другим примером служит прямоугольный треугольник, у которого медиана, проведенная из вершины острого угла, образует с катетом, выходящим из той же вершины, угол 30° .



Критерии. Только ответ «существует»: 0 баллов.

Чертёж без обоснования: 0 баллов. При этом следует учитывать, что роль обоснования полностью или частично могут сыграть указанные на чертеже параметры (длины и соотношения длин отрезков, величины углов и т. п.).

8. Будем называть натуральное число **красивым**, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым? (К. Сухов)

Ответ. Не может. **Решение.** Очевидно, количество цифр красивого числа делится на 3. Если в десятичной записи красивого числа x $3n$ цифр, то оно удовлетворяет неравенству $10^{3n-1} < x < 3 \cdot 10^{3n-1}$ (*). Следовательно, произведение двух красивых чисел, записываемых $3k$ и $3m$ цифрами соответственно, лежит между числами $10^{3(k+m)-2}$ и $9 \cdot 10^{3(k+m)-2}$, а, значит, и между степенями десятки с показателями $3(k+m)-2$ и $3(k+m)-1$. Красивое же число в силу неравенства (*) лежит между степенями десятки с показателями $3n-1$ и $3n$. Поэтому произведение двух красивых чисел не может быть красивым.

Критерии. Только ответ «не может»: 0 баллов.

Замечено только, что в числе $3n$ цифр, дальнейшего содержательного продвижения нет: 0 баллов.

Замечено, что в числе $3n$ цифр, выписано неравенство $10^{3n-1} < x$, дальнейшего содержательного продвижения нет: 1 балл.

Замечено, что в числе $3n$ цифр, выписаны оба неравенства, входящих в двойное неравенство (*), дальнейшего содержательного продвижения нет: 2 балла.

Не объяснено, почему неравенство $10^{3(k+m)-2} < x < 9 \cdot 10^{3(k+m)-2}$ несовместимо с неравенством (*) — штраф в 1 балл.

Любые не доведённые до полного решения рассуждения про расположение цифр в красивом числе (в том числе с установлением каких-либо свойств наборов последних цифр красивых чисел) не оцениваются.

9. Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васини с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Оказалось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают. (С. Берлов)

Решение. Пусть Петя записал числа $a_1 > a_2 > \dots > a_{100}$, а Вася — $b_1 > b_2 > \dots > b_{100}$. Если $a_1 > b_1$, то у Васи один из остатков будет b_1 , а у Пети все остатки будут меньше b_1 — противоречие. Аналогично приводит к противоречию предположение, что $a_1 < b_1$. Значит, $a_1 = b_1$.

Допустим, мы уже доказали, что $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$ для некоторого $k \geq 1$. Наборы остатков от деления друг на друга чисел a_1, \dots, a_k у Пети и Васи совпадают, вычеркнем все эти остатки. Если $a_{k+1} > b_{k+1}$, то у Пети среди невычеркнутых остатков есть k чисел a_{k+1} — остатки от деления Петиного числа a_{k+1} на все большие Васины числа, а у Васи все невычеркнутые остатки меньше a_{k+1} , так как там либо делимое меньше a_{k+1} , либо делитель не превосходит a_{k+1} . Аналогично разбирается случай, когда $a_{k+1} < b_{k+1}$. Поэтому $a_{k+1} = b_{k+1}$. Последовательно проводя это рассуждение для $k = 1, 2, \dots, 99$ (а знакомые с методом математической индукции сразу оформят его как индукционный переход), мы докажем утверждение задачи.

Критерии. Доказано, что у Васи и Пети равны наибольшие числа, дальнейшее содержательное продвижение отсутствует: *2 балла*. Рассуждение типа «аналогично доказывается совпадение двух следующих чисел и т. д.» содержательным продвижением не является, поскольку доказательство дальнейших совпадений требует существенной модификации доказательства совпадения двух наибольших чисел.

10. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера $1, 2, \dots, 100$, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k . При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению? (С. Берлов)

Ответ. 50. **Решение.** *Пример.* Фишку 50 последовательно 99 раз меняем со следующей против часовой стрелки. *Оценка.* Рассуждаем от противного. Пусть $k < 50$. Будем считать сдвиги фишек относительно их начальных позиций, причем сдвиг по часовой стрелке считаем с плюсом, против часовой — с минусом. Тогда при обмене двух фишек к сдвигу одной из них прибавляется 1, а из сдвига другой вычитается 1. Пусть после нескольких ходов все фишки сместились на одну позицию по часовой стрелке. Тогда полный сдвиг фишки с номером k равен $100t_k + 1$, где t_k — число полных оборотов этой фишки (обороты по часовой стрелке считаются со знаком плюс, а против часовой — со знаком минус). Так как $k < 50$, фишки с номерами 1 и 51 не могли меняться местами, и потому совершили одинаковое число полных оборотов, то есть $t_1 = t_{51}$. Аналогично, $t_2 = t_{52}, \dots, t_{50} = t_{100}$. Поэтому сумма всех сдвигов всех фишек равна $100(2t_1 + \dots + 2t_{50} + 1)$. Она должна быть равна 0, так как равна 0 сумма сдвигов при каждом ходе. Но она не равна 0, так как сумма в скобках нечетна. Противоречие.

Критерии. Только верный ответ: *0 баллов*.

Баллы за пример и оценку суммируются.

Дан верный ответ, приведен верный пример, продвижения в доказательстве оценки нет: *2 балла*.

Ответ и доказанная оценка, примера нет: *4 балла*.

Замечено, что сумма ориентированных сдвигов фишек относительно их начальных расположений равна 0, других содержательных продвижений нет (наличие ответа при отсутствии примера содержательным продвижением не считается): *1 балл*.