<u>XLVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников</u>

11 класс

Первый день

11.1. Однажды на перемене Вася выписал на листке десять натуральных чисел. Все написанные числа попарно различны. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

11.2. Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что найдутся попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b+c)=P(a), P(c+a)=P(b), P(a+b)=P(c).$$

11.3. В треугольной пирамиде $ABCD$ на её гранях BCD и ACD нашлись соответственно точки A' и B' такие, что $\angle AB'C=\angle AB'D=\angle BA'C=\angle BA'D=120^\circ$. Известно, что прямые AA' и BB' пересекаются. Докажите, что точки A' и B' равноудалены от прямой CD.

11.4. В компании "Служба 101" некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что при любом выборе 101 человека из этой компании количество пар дружащих людей среди них нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

11.5. Пусть S –.100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел. Все элементы множества не превосходят 10000. Отметим в пространстве все точки, у которых все координаты принадлежат множеству S. К каждой из 1000000 отмеченных точек (x, y, z) приклеим листик с написанным на нём числом $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$. На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?

XLVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.6. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ такова, что $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leq n \leq 2022$ и $1 \leq k \leq 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022}?

11.7. Произведение цифр натурального числа n равно x, а произведение цифр числа $n+1$ равно y. Может ли оказаться, что произведение цифр некоторого натурального числа m равно $y-1$, а произведение цифр числа $m+1$ равно $x-1$?

11.8. В вершинах правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых нанесены номера 1, 2,…100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За один ход разрешается поменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, при условии, что номера этих фишек различаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка передвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?

11.9. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность ω. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Точка M – середина отрезка AB. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает окружность ω в точках K и L. Точка N – середина дуги CD описанной окружности треугольника PCD, не содержащей точку P. Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности.

11.10. Даны неотрицательные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=8$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2+b+c}+\frac{b^3}{b^2+c+d}+\frac{c^3}{c^2+d+a}+\frac{d^3}{d^2+a+b} \geq 4.$$