

## Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

## Тренировочный вариант №309

## Уровень 2

## Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». Всего в работе 25 заданий. Модуль «Алгебра» содержит семнадцать заданий: в части 1 — четырнадцать заданий; в части 2 — три задания. Модуль «Геометрия» содержит восемь заданий: в части 1 — пять заданий; в части 2 — три задания.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 записываются в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Эту цифру запишите в поле ответа в тексте работы.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр, которые нужно записать в поле ответа в тексте работы. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе или бланке. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Баллы, полученные Вами за выполненные верно задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

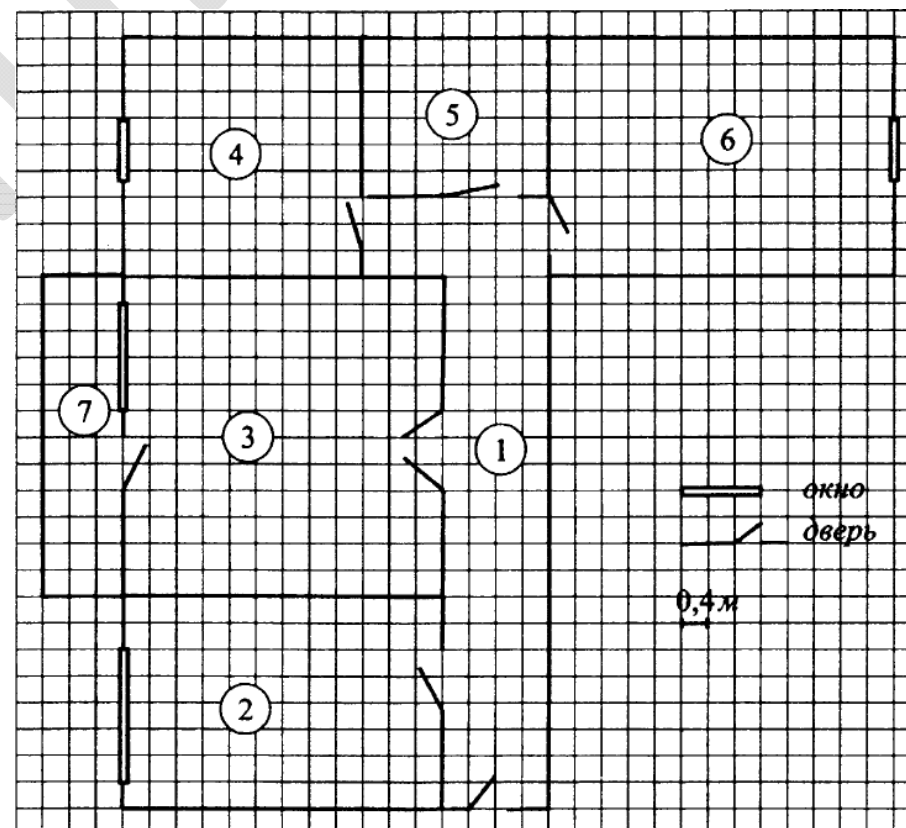
**Желаем успеха!**

## Часть 1

Ответами к заданиям 1 – 19 являются цифра, число или последовательность цифр, которые следует вписать в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

## Модуль «Алгебра»

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5



На рисунке (см. выше) изображён план трёхкомнатной квартиры в многоэтажном жилом доме. Сторона каждой клетки на плане соответствует 0,4 м.

Вход в квартиру находится в коридоре. Слева от входа в квартиру располагается спальня, а в противоположном конце коридора – дверь в санузел. Рядом со спальней находится гостиная, из которой можно выйти на застеклённую лоджию. Детская и кухня находятся напротив друг друга, причём у кухни общая стена с гостиной.

**1.** Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу. В ответе запишите последовательность четырёх цифр без пробелов и других разделительных символов.

Объекты				
Цифры				

Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.** Паркетная доска 20 см × 20 см продаётся в упаковках по 12 штук. Сколько упаковок паркетной доски понадобилось, чтобы уложить пол в гостиной?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.** Найдите площадь (в м<sup>2</sup>) коридора.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**4.** На сколько процентов площадь гостиной больше площади лоджии, примыкающей к гостиной?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.** В квартире планируется подключить интернет. Предполагается, что трафик составит 1000 Мб в месяц, и, исходя из этого, выбирается наиболее дешёвый вариант. Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана (см. табл.). Сколько рублей можно будет заплатить за интернет в месяц, если трафик действительно будет равен 1000 Мб?

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
«800»	800 руб. за 800 Мб трафика в месяц	2,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб
«900»	880 руб. за 900 Мб трафика в месяц	1,8 руб. за 1 Мб сверх 900 Мб
Безлимитный	1200 руб.	–

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6.** Найдите значение выражения  $\frac{12,5^3 + 1,2^3}{13,7} - 12,5^2 - 1,2^2$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**7.** Пусть  $a, b, c$ , – действительные положительные числа. Причём  $abc = 1$ . Найдите наименьшее значение выражения:

$$\frac{a^5 b^5}{a^2 + b^2} + \frac{b^5 c^5}{b^2 + c^2} + \frac{c^5 a^5}{c^2 + a^2}.$$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

1)  $\frac{1}{2}$

2) 1

3)  $\frac{3}{2}$

4) 2

Ответ: \_\_\_\_\_.

8. Найдите значение выражения  $\frac{x(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}{a(x-a)^{-\frac{1}{2}} + (x-a)^{\frac{1}{2}}} : \frac{a^2\sqrt{x+a}}{x - (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^2 - ax}$  при  $x = \sqrt{597}$  и  $a = \sqrt{595}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

9. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 5 \\ (x+y)(x^2-y^2) = 9 \end{cases}$$

В ответе запишите значение выражения  $-5x_1 + 5y_1 + x_2 + 4x_3$ , где  $(x_i; y_i)$  – решение этой системы, причём  $x_{i+1} > x_i$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

10. По кругу стоят 10 детей разного роста. Время от времени один из них перебегает на другое место (между какими-то двумя детьми). Дети хотят как можно скорее встать по росту в порядке возрастания по часовой стрелке (от самого низкого к самому высокому). Какого наименьшего количества таких перебежек им заведомо хватит, как бы они ни стояли изначально?

Ответ: \_\_\_\_\_.

11. Функция  $f(x)$  определена для любых действительных значений  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$  и при любых действительных значениях  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$  удовлетворяет равенству:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

Установите соответствие между выражениями для значений функции  $f(x)$  и значениями этой функции. В ответе укажите последовательность цифр, соответствующих А, Б, В, без пробелов, запятых и других разделительных символов.

А)  $f(5)$

Б)  $f(6)$

В)  $f(-39)$

1)  $\frac{121}{40}$

2)  $-\frac{59279}{3120}$

3)  $\frac{211}{60}$

Ответ: \_\_\_\_\_.

12. Длина биссектрисы  $l_c$ , проведённой к стороне с треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , вычисляется по формуле  $l_c = \frac{\sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)}}{a+b}$ . Найдите длину биссектрисы  $l_c$ , если  $a = 3$ ,  $b = 9$ ,  $c = 4\sqrt{6}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**13.** Решите в действительных числах неравенство:

$$\frac{x^9 - 81x - 62}{x^3} \leq 18 \cdot \sqrt[3]{3x + 2}.$$

В ответе укажите номер правильного варианта ответа.

1)  $\{-1\} \cup (0; 2]$

2)  $(-\infty; -1]$

3)  $[-1; 2]$

4)  $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**14.** Однажды богач заключил выгодную, как ему казалось, сделку с человеком, который в течение 15 дней ежедневно должен был приносить по 1000 руб., а взамен в первый день богач должен был отдать 10 руб., во второй — 20 руб., в третий — 40 руб., в четвертый — 80 руб. и т. д. в течение 15 дней. В ответ запишите, сколько рублей потерял богач за 15 дней.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**Модуль «Геометрия»**

**15.** В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AC = 13\sqrt{2}$ ,  $AB = 14\sqrt{2}$ ,  $BC = 15\sqrt{2}$ . На стороне  $BC$  взята точка  $M$ , причём  $CM : MB = 1 : 2$ . Найдите  $AM$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**16.** В четырёхугольнике  $ABCD$  известно, что  $\angle DAB = \angle DBC = 90^\circ$ ,  $DB = 8$ ,  $DC = 10$ . Найдите расстояние между центрами двух окружностей, одна из которых проходит через точки  $D, A, B$ , а другая — через точки  $B, C, D$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**17.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$  и  $BE$ , пересекающиеся в точке  $O$ . Известно, что  $OE = \sqrt{3}$ , а точки  $C, D, E$  и  $O$  лежат на одной окружности. Найдите  $DE$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**18.** Проекция диагонали равнобедренной трапеции на её большее основание равна 7, боковая сторона равна 6. Найдите площадь трапеции, если угол при её меньшем основании равен  $150^\circ$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**19.** Какие из следующих утверждений верны? Если верных утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания без пробелов, запятых и других разделительных символов.

- 1) Через любую точку проходит не менее одной прямой.
- 2) Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны  $65^\circ$ , то эти две прямые параллельны.
- 3) Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы составляют в сумме  $90^\circ$ , то эти две прямые параллельны.

Ответ: \_\_\_\_\_.

## Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте бланк ответов №2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

**Модуль «Алгебра»**

20. Решите в целых числах уравнение:

$$x^3 - y^3 = 2xy + 8.$$

21. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

22. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-a)^2} = \sqrt{4+a^2} \\ 5y = |6-a^2| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Модуль «Геометрия»**

23. Пусть  $\omega$  — окружность Аполлония для точек  $A$  и  $B$ , причём точка  $A$  лежит вне круга, ограниченного окружностью  $\omega$ . Из точки  $A$  проведены касательные  $AP$  и  $AQ$  к окружности  $\omega$ . Найдите  $BQ$ , если известно, что  $PQ = 6$ .

24. На отрезке  $AC$  взята точка  $B$ . На отрезках  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  соответственно построены полуокружности  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  по одну сторону от  $AC$ .  $D$  — такая точка на  $\omega_3$ , что  $BD$  перпендикулярна  $AC$ . Общая касательная к  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касается этих полуокружностей в точках  $F$  и  $E$  соответственно. Докажите, что  $BFDE$  — прямоугольник.

25. Пусть  $L$  — точка Лемуана треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  и высотой  $CH = 14$ . Найдите  $LH$ .