ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА
10 класс

Ответы:

		Вариант 1		Вариант 2
1.	а)	3 части	а)	3 части
	б)	Любые два из перечисленных: $PBTU$, $VSUB_1$, $APTCA_1VQRSC_1$.	б)	Любые два из перечисленных: $AKNP$, $CLOM$, $KBLPOSDMN$.
2.	а)	Неверно	а)	Верно
	б)	Неверно	б)	Неверно
	в)	Неверно	в)	Неверно
	г)	Верно	г)	Верно
3А.	б)	1 : 7, считая от точки B_1	б)	1 : 4, считая от точки B
3Б.	б)	4 : 5, считая от точки C_1	б)	3 : 4, считая от точки C
5.	а)	18	а)	16
	б)	15	б)	13
	в)	6	в)	6
6.	б)	350	б)	380

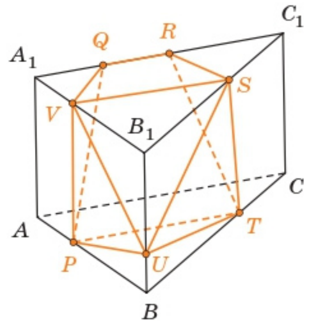
Решения: **Вариант 1**

1. Из треугольной призмы вырезали многогранник $PQRSTUV$, показанный на рисунке.

а) На какое количество частей распадётся эта призма?

б) Выпишите названия вершин двух из этих частей.

Вырезанный многогранник при подсчёте частей ***не учитывается!***

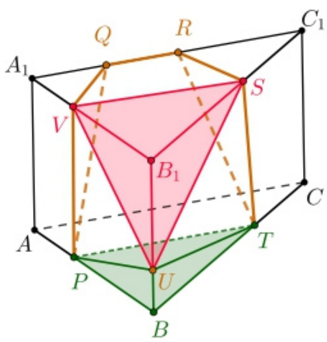


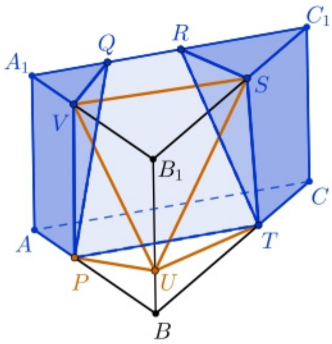
Ответ:

а) 3 части

Решение:

На рисунках показаны две части, являющиеся треугольными пирамидами ($PBTU$ и $VSUB_1$), и ещё одна оставшаяся часть, её вершины выделены цветом ($APTCA_1VQRSC_1$).





2.

а) Любое сечение куба является многоугольником, у которого будет хотя бы четыре стороны.

Неверно. Существует треугольное сечение, проходящее через середины трёх рёбер, выходящих из одной вершины куба.

б) Если две прямые в пространстве не пересекаются, они называются параллельными.

Неверно. Если две такие прямые не лежат в одной плоскости они будет скрещивающимися, а не параллельными.

в) Если две прямые параллельны одной и той же плоскости, то они либо параллельны между собой, либо совпадают.

Неверно. Например, можно взять две пересекающиеся прямые и любую плоскость, параллельную, плоскости, образованной этими двумя плоскостями.

г) Через две пересекающиеся прямые в пространстве проходит ровно одна плоскость.

Верно.

Ответ:

а) Неверно

б) Неверно

в) Неверно

г) Верно

3А. На ребрах A_1D_1, AB, BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки M, K и L.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, K и L. Опишите алгоритм построения.

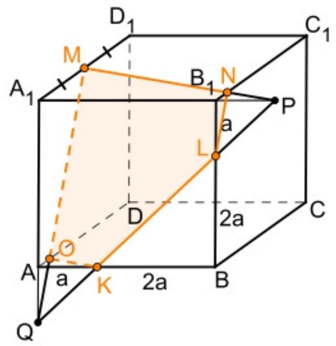
б) Определите, в каком отношении плоскость (MKL) делит ребро B_1C_1, если известно, что M — середина A_1D_1, $AK : KB = 1 : 2$ и $B_1L : LB = 1 : 2$.

Ответ:

б)

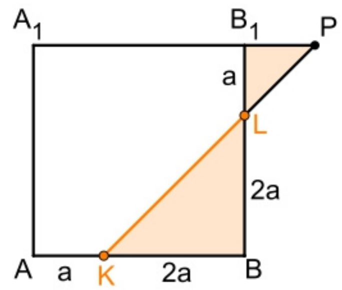
Решение:

а) Построение сечения:



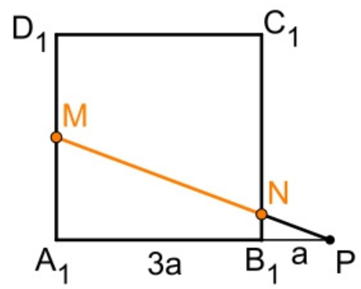
1. В грани ABB_1A_1 проведём прямую KL до пересечения с прямыми A_1B_1 и AA_1 в точках P и Q соответственно.
2. В грани $A_1B_1C_1D_1$ проведём прямую MP и пересечём её с ребром B_1C_1 в точке N.
3. В грани ADD_1A_1 проведём прямую MQ и пересечём её с ребром AD в точке O.
   Сечение $MNLKO$ — искомое.

б) Подсчёт отношения:



1. В грани ABB_1A_1 треугольники LB_1P и LBK образуют положение «песочные часы», а следовательно, подобны. Значит, $\frac{B_1P}{BK} = \frac{B_1L}{LB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, откуда $B_1P = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$.

2. В грани $A_1B_1C_1D_1$ треугольники B_1NP и A_1MP образуют положение «пирамида», а следовательно, подобны. Тогда мы можем вычислить $B_1N = A_1M \cdot \frac{B_1P}{A_1P} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{4a} = \frac{3a}{8}$. Тогда $B_1N : NC_1 = \frac{3a}{8} : \left(3a - \frac{3a}{8}\right) = \frac{3}{8} : \frac{21}{8} = 1 : 7$.



3Б. На ребрах A_1C_1, AB, AA_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки M, K и L.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, K и L. Опишите алгоритм построения.

б) Определите, в каком отношении плоскость (MKL) делит ребро B_1C_1, если известно, что L — середина AA_1, $A_1M : MC_1 = 1:2$ и $AK : KB = 2:1$.

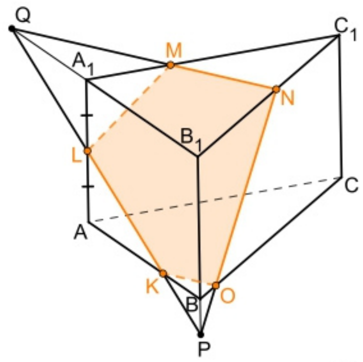
Ответ:

б) $4 : 5$, считая от вершины C_1.

Решение:

а) Построение сечения:

1. В грани ABB_1A_1 проведём прямую LK до пересечения с прямыми BB_1 и A_1B_1 в точках P и Q соответственно.
2. В грани $A_1B_1C_1$ проведём прямую QM до пересечения с ребром B_1C_1 в точке N.
3. В грани BCC_1B_1 проведём прямую NP до пересечения с ребром BC в точке O.
   Сечение $KLMNO$ — искомое.

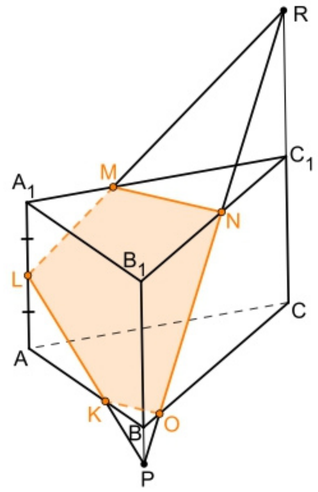


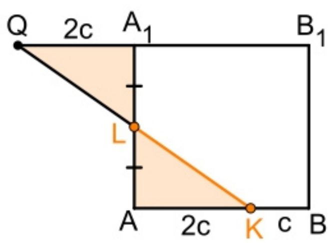
б) Подсчёт отношения:

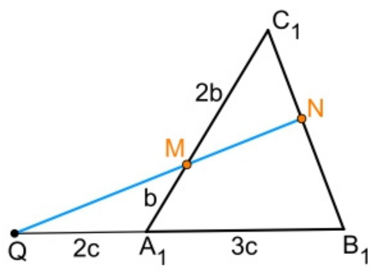
Первый способ.

1. В плоскости (ABB_1A_1) треугольники LAK и LA_1Q образуют положение «песочные часы», а следовательно, подобны. Тогда мы можем найти $A_1Q = AK \cdot \frac{A_1L}{LA} = 2c$.

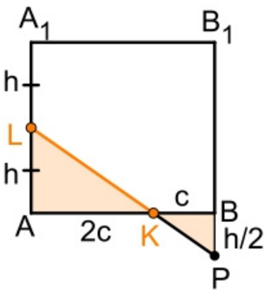
2. В плоскости $(A_1B_1C_1)$ применим для треугольника $A_1B_1C_1$ и секущей QMN теорему Менелая. Тогда $\frac{A_1M}{MC_1} \cdot \frac{C_1N}{NB_1} \cdot \frac{B_1Q}{QA_1} = 1$, откуда можем найти $C_1N : NB_1 = \frac{MC_1}{A_1M} \cdot \frac{QA_1}{B_1Q} = \frac{2b}{b} \cdot \frac{2c}{5c} = 4 : 5$.



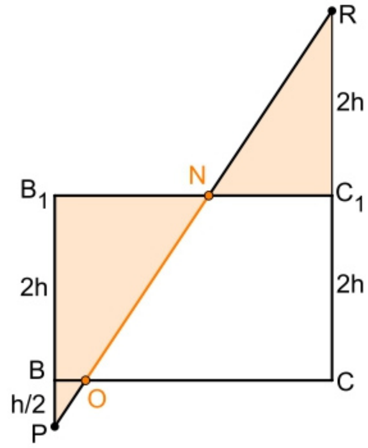




<u>Второй способ.</u>



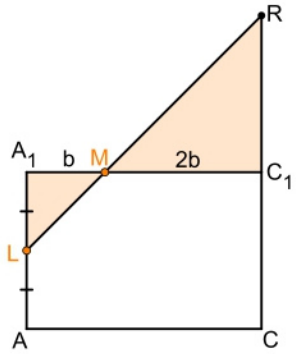
1. Проведём в грани ACC_1A_1 прямую LM до пересечения с прямой CC_1 в точке R. Тогда Точки R, N, P лежат в плоскости сечения, а значит, на одной прямой.



2. В плоскости (ACC_1A_1) треугольники MA_1L и MC_1R образуют положение «песочные часы», а значит, подобны. Следовательно, $\frac{C_1R}{C_1M} = \frac{A_1L}{A_1M}$, откуда $C_1R = 2h = 2A_1L = CC_1$ (здесь $AL = LA_1 = h$).

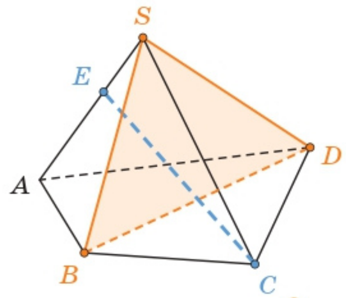
3. В плоскости ABB_1A_1 треугольники KAL и KBP образуют положение «песочные часы», а следовательно, подобны. Тогда $BP = AL \cdot \frac{BK}{AK} = \frac{h}{2}$.

4. В плоскости (BCC_1B_1) треугольники PB_1N и RC_1N образуют положение «песочные часы», а следовательно, подобны. Тогда $C_1N : NB_1 = C_1R : B_1P = 2h : \left(2h + \frac{h}{2}\right) = 4 : 5$.

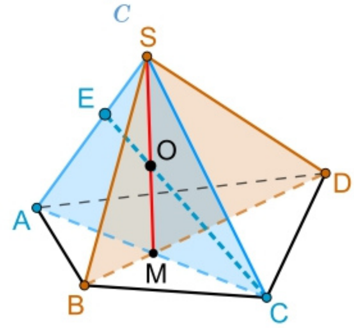


4А. На ребре SA пирамиды $SABCD$ взята точка E. Постройте точку пересечения прямой EC с плоскостью BSD. Опишите алгоритм построения.

Решение:

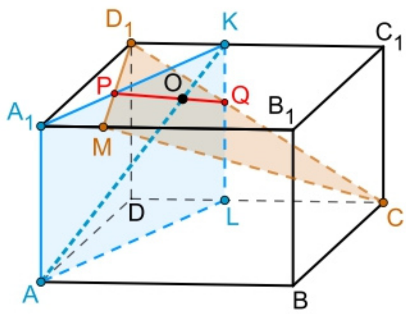


1. Рассмотрим вспомогательную плоскость ASC, в которой лежит прямая EC. Проведём отрезок AC, лежащий в ней.
2. В грани $ABCD$ пересечём отрезки AC и BD в точке M. Эта точка лежит и в плоскости BSD и во вспомогательной плоскости.
3. Проведём отрезок SM пересечения плоскостей BSD и ACS, так как оба его конца лежат в обеих плоскостях.
4. Пересечём отрезки CE и SM в точке O. Эта точка и является искомой.



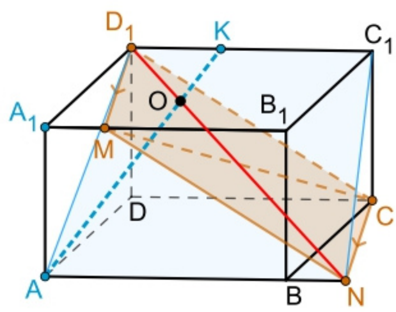
4Б. На ребрах A_1B_1 и C_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки M и K. Постройте точку пересечения прямой AK с плоскостью (CD_1M). Опишите алгоритм построения.

Решение:



1. Рассмотрим вспомогательную плоскость AA_1KL. Для этого построим точку L, проведя через точку K прямую, параллельную AA_1, до пересечения с ребром CD, а также, соединим точки A_1 и K и точки A и L.
2. Построим прямую пересечения плоскостей CMD_1 и AA_1KL. Для этого в грани $A_1B_1C_1D_1$ отметим точку P пересечения отрезков A_1K и D_1M, а в грани CDD_1C_1 отметим точку Q пересечения отрезков CD_1 и KL. Соединим точки P и Q отрезком.
3. Во вспомогательной плоскости AA_1KL пересечём отрезки PQ и AK в точке O. Это точка и является искомой.

   На второй картинке приведено альтернативное построение.



5. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $MN \parallel AC$. Высота BH этого треугольника пересекает отрезок MN в точке K. Известно, что $AM = 4\sqrt{3}$, $MB = 6\sqrt{3}$, $BC = AC = 30$.

а) Найдите длину отрезка BN.

б) Найдите длину отрезка KN.

в) Прямая AK пересекает отрезок BN в точке L. Найдите длину отрезка BL.

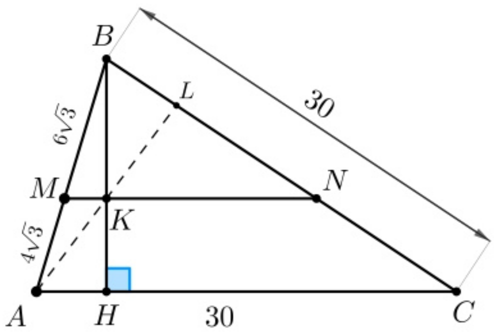
Ответ:

а) $BN = 18$

б) $KN = 15$

в) $BL = 6$

Решение:



а) Треугольники MBN и ABC образуют стандартное положение «пирамида», а следовательно, подобны. Значит, $\frac{BN}{BC} = \frac{BM}{BA} = \frac{6\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{5}$, откуда находим $BN = 30 \cdot \frac{3}{5} = 18$. Аналогично можно найти $MN = AC \cdot \frac{3}{5} = 18$.

б) Обозначим длину отрезка KN через x. Тогда $MK = 18 - x$. Так как $MN \parallel AC$, то $\angle BKN = \angle BHC = 90°$.

Следовательно, треугольники MKB и NKB прямоугольные и для них можно записать теорему Пифагора. Имеем

$$BK^2 + (18 - x)^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2,$$
$$BK^2 + x^2 = 18^2.$$

Выражая BK^2 из обоих уравнений можем записать уравнение

$$\left(6\sqrt{3}\right)^2 - (18 - x)^2 = 18^2 - x^2.$$

Раскрывая скобки получаем $3 \cdot 6^2 - 18^2 + 2 \cdot 18 \cdot x - x^2 = 18^2 - x^2$. Сократим x^2 с обеих сторон и поделим обе части на 18. Получим $6 - 18 + 2x = 18$, откуда $2x = 30$, т. е. $x = 15$.

KN можно было найти и другим способом. Запишем для треугольника MBN теорему косинусов:

$$MB^2 = MN^2 + BN^2 - 2 \cdot MN \cdot NB \cdot \cos\angle MNB.$$

С учётом $MN = NB = 18$ получаем

$\cos\angle MNB = \frac{2\cdot 18^2 - \left(6\sqrt{3}\right)^2}{2\cdot 18^2} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, после чего $KN = NB \cdot \cos\angle MNB = 15$.

в) Наконец, для нахождения отрезка BL воспользуемся теоремой Менелая для треугольника MBN и секущей AKL:

$$\frac{NK}{KM} \cdot \frac{MA}{AB} \cdot \frac{BL}{LN} = 1.$$

Откуда находим

$$\frac{BL}{LN} = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{MK}{KN} = \frac{10\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{18 - 15}{15} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, если $BL = y$, то $LN = 2y$ и $BN = 3y = 18$, откуда $y = 6$.

6. На рёбрах BC и CD треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки N и M соответственно, причём $BN : NC = DM : MC = 1 : 3$. Точки L и K — середины сторон AB и AD соответственно.

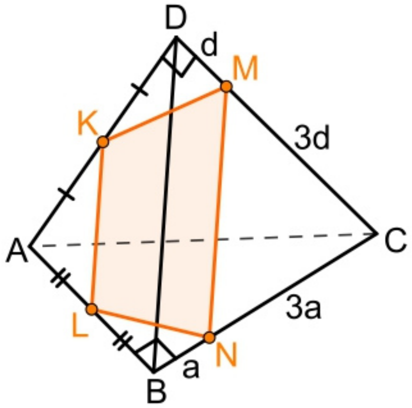
а) Докажите, что L, K, N и M лежат в одной плоскости.

б) Найдите площадь четырёхугольника $LKMN$, если известно, что $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, а так же $AB = AD = 22$, $BD = 40$, $AC = 2\sqrt{521}$.

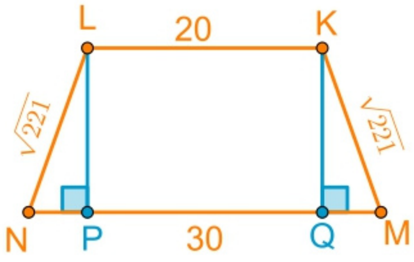
Ответ:

б) $S_{LKMN} = 350$

Решение:



а) В грани ABD отрезок KL является средней линией треугольника ABD, а следовательно, параллелен его основанию: $KL \parallel BD$. В треугольнике BDC точки M и N делят стороны CB и CD в одинаковом отношении, а значит, отрезки MN и BD параллельны между собой. Тогда $KL \parallel MN$ по свойству транзитивности параллельности. Из параллельности прямых следует, что они лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.



б) В силу параллельности прямых четырёхугольник $LKMN$ является трапецией. Найдём её стороны.

Основание KL является средней линией, а значит, $KL = \frac{1}{2}BD = 20$. Треугольники BDC и NMC подобны по общему углу и двум прилежащим к ним сторонам. Коэффициент подобия равен

$k = MC/DC = 3/4$. Значит, $MN = \frac{3}{4}BD = 30$.

Боковые стороны трапеции найдём из прямоугольных треугольников BNL и DKM. Для этого сначала найдём их катеты. $BL = KD = \frac{1}{2}AB = 11$. По теореме Пифагора в треугольнике ABC находим $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4 \cdot 521 - 22^2} = 2\sqrt{521 - 121} = 40$.

Следовательно, $BN = \frac{1}{4}BC = 10$.

Треугольники ADC и ABC равны по катету и гипотенузе, а следовательно, $DC = BC$ и $DM = BN = 10$.

Теперь по теореме Пифагора мы можем найти

$$LN = \sqrt{BN^2 + BL^2} = \sqrt{11^2 + 10^2} = \sqrt{221}.$$

Треугольники BLN и DKM равны по двум катетам, а следовательно, и $KM = \sqrt{221}$.

Рассмотрим трапецию $LKMN$. Она является равнобедренной. Следовательно, если мы опустим высоты LP и KQ на основание MN, то $PQ = LK = 20$, а $NP = QM = \frac{30-20}{2} = 5$. Тогда из прямоугольного треугольника NLP по теореме Пифагора находим

$$LP = \sqrt{LN^2 - NP^2} = \sqrt{221 - 5^2} = \sqrt{196} = 14.$$

Осталось найти площадь трапеции по формуле

$$S = \frac{1}{2}h(a + b) : S_{LKMN} = h \cdot \frac{1}{2}(a + b) = 14 \cdot (20 + 30) : 2 = 350.$$

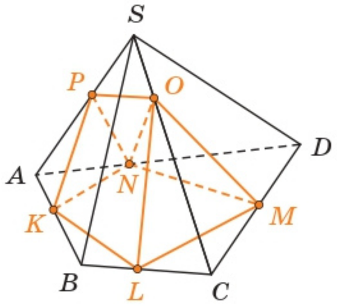
Решения: **Вариант 2**

1. Из четырёхугольной пирамиды вырезали многогранник $KLMNOP$, показанный на рисунке.

а) На какое количество частей распадётся пирамида?

б) Выпишите названия вершин двух из этих частей.

Вырезанный многогранник при подсчёте частей ***не учитывается!***

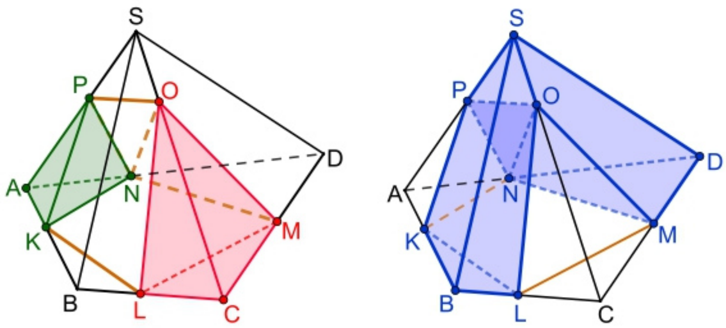


Ответ:

а) 3 части

Решение:

На рисунках показаны две части, являющиеся треугольными пирамидами ($PAKN$ и $OLCM$), и ещё одна оставшаяся часть, её вершины выделены синим цветом ($KBLPOSDMN$).



2.

а) Сечение треугольной призмы не может быть шестиугольником.

Верно. Каждое ребро сечения лежит в своей грани. У треугольной призмы всего 5 граней. Поэтому у сечения не может быть больше 5 рёбер.

б) В пространстве две пересекающиеся прямые называются скрещивающимися.

Неверно. Скрещивающимися в пространстве называются прямые, не лежащие в одной плоскости. Такие прямые не пересекаются.

в) Если две плоскости параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

Неверно. Например, можно взять две пересекающиеся плоскости и любую прямую, параллельную прямой их пересечения, не лежащую в этих плоскостях.

г) Через произвольную прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести ровно одну плоскость.

Верно.

Ответ:

а) Верно

б) Неверно

в) Неверно

г) Верно

3А. На ребрах A_1D_1, AB, BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки M, K и L.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, K и L. Опишите алгоритм построения.

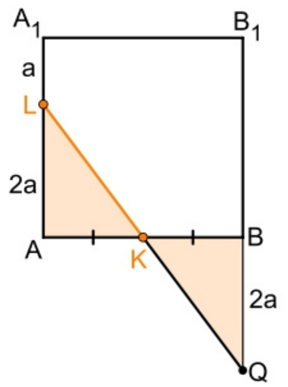
б) Определите, в каком отношении плоскость (MKL) делит ребро B_1C_1, если известно, что M — середина A_1D_1, $AK : KB = 1 : 2$ и $B_1L : LB = 1 : 2$.

Ответ:

б) $1 : 4$, считая от точки B

Решение:

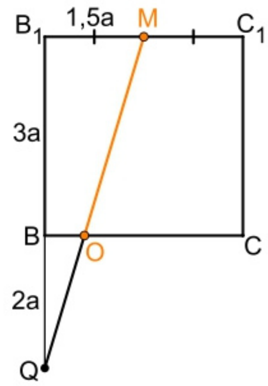
а) Построение сечения.



1. В грани ABB_1A_1 проведём прямую KL до пересечения с прямыми A_1B_1 и BB_1 в точках P и Q соответственно.
2. В грани $A_1B_1C_1D_1$ проведём прямую MP и пересечём её с ребром A_1D_1 в точке N.
3. В грани BCC_1B_1 проведём прямую MQ и пересечём её с ребром BC в точке O.

   Сечение $MNLKO$ — искомое.

б) Подсчёт отношения.



1. В грани ABB_1A_1 треугольники LAK и QBK образуют положение «песочные часы», а следовательно, подобны. Значит, $\frac{BQ}{AL} = \frac{BK}{AK} = 1$, откуда $BQ = 2a$.
2. В грани BCC_1B_1 треугольники BOQ и B_1MQ образуют положение «пирамида», а следовательно, подобны. Тогда мы можем вычислить $BO = B_1M \cdot \frac{BQ}{B_1Q} = 1{,}5a \cdot \frac{2a}{5a} = 0{,}6a$. Тогда $BO : OC = 0{,}6a : (3a - 0{,}6a) = 1 : 4$.

3Б. На ребрах A_1C_1, AB, AA_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки M, K и L.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, K и L. Опишите алгоритм построения.

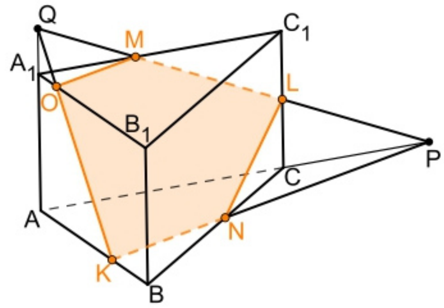
б) Определите, в каком отношении плоскость (MKL) делит ребро B_1C_1, если известно, что L — середина AA_1, $A_1M : MC_1 = 1:2$ и $AK : KB = 2:1$.

Ответ:

б) $3 : 4$, считая от вершины C

Решение:

а) Построение сечения.

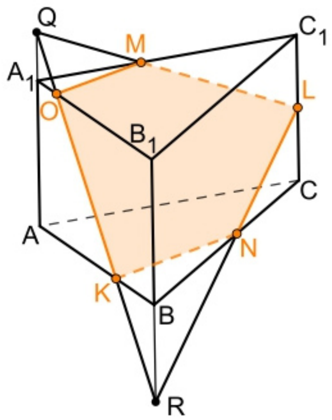


1. В грани ACC_1A_1 проведём прямую LM до пересечения с прямыми AC и AA_1 в точках P и Q соответственно.

2. В грани ABC проведём прямую PK до пересечения с ребром BC в точке N.

3. В грани ABB_1A_1 проведём прямую QK до пересечения с ребром A_1B_1 в точке O.

   Сечение $KNLMO$ — искомое.

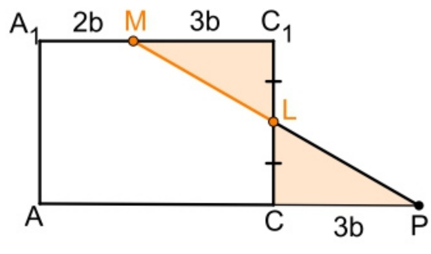


б) Подсчёт отношения.

Первый способ.

1. В плоскости (ACC_1A_1) треугольники LC_1M и LCP образуют положение «песочные часы», а следовательно, подобны. Тогда мы можем найти

$$CP = C_1M \cdot \frac{CL}{LC_1} = C_1M = 3b.$$

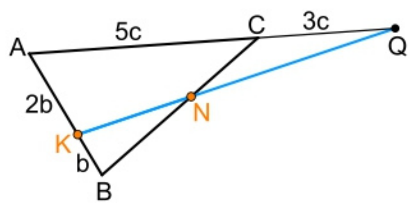


2. В плоскости (ABC) применим для треугольника ABC и секущей KNP теорему Менелая. Тогда

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BK}{KA} \cdot \frac{AP}{PC} = 1,$$

откуда можем найти

$$CN : NB = \frac{AK}{KB} \cdot \frac{CP}{PA} = \frac{2c}{c} \cdot \frac{3b}{8b} = 3 : 4.$$



Второй способ.

1. В грани ACC_1A_1 треугольники QMA_1 и LMC_1 образуют положение «песочные часы», а следовательно, подобны. Обозначив $CL = LC_1 = 3h$ получаем

$$QA_1 = CL \cdot \frac{A_1M}{MC_1} = 3h \cdot \frac{2b}{3b} = 2h.$$

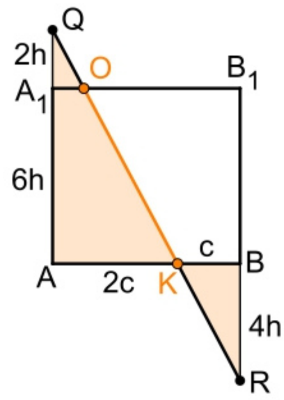
2. В плоскости грани ABB_1A_1 продлим прямую QK до пересечения с прямой BB_1 в точке R.

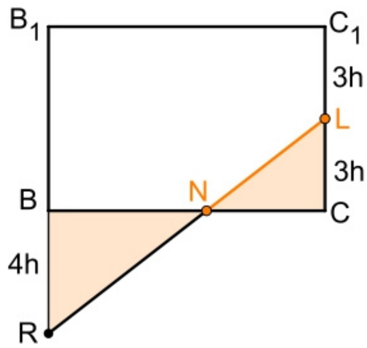
3. В плоскости ABB_1A_1 треугольники QKA и RKB образуют положение «песочные часы», а следовательно, подобны. Тогда

$$BR = AQ \cdot \frac{BK}{AK} = 8h \cdot \frac{c}{2c} = 4h.$$

4. В плоскости (BCC_1B_1) треугольники RBN и LCN образуют положение «песочные часы», а следовательно, подобны. Тогда

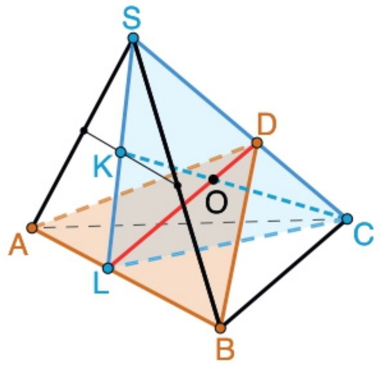
$$CN : NB = CL : BR = 3h : 4h = 3 : 4.$$





4А. В грани ABS пирамиды $SABCD$ взята точка K. Постройте точку пересечения прямой CK с плоскостью (ABD). Опишите алгоритм построения.

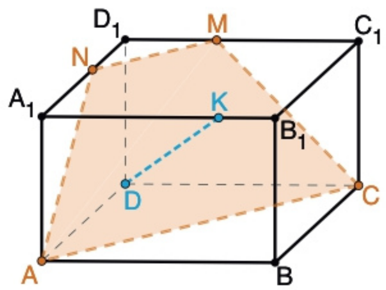
Решение:



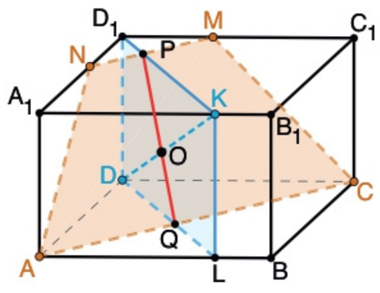
1. Рассмотрим вспомогательную плоскость KSC, в которой лежит прямая KC. Проведём в ней прямую KS до пересечения с отрезком AB в точке L.
2. В грани ABD проведём прямую пересечения плоскостей ABD и CKS. Это будет отрезок DL.
3. Пересечём отрезки DL и CK в точке O. Эта точка и является искомой.

4Б. На ребрах A_1B_1 и C_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки K и M. Постройте точку пересечения прямой DK с плоскостью (ACM). Опишите алгоритм построения.

Решение:

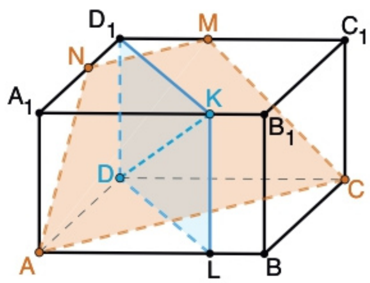


1. Рассмотрим вспомогательную плоскость DD_1KL. Для этого построим точку L, проведя через точку K прямую, параллельную AA_1, до пересечения с ребром AB, а также, соединим точки D_1 и K и точки D и L.



2. Построим сечение нашего параллелепипеда плоскостью AMC. Для этого в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ проведём прямую KN, параллельную прямой AC, до пересечения с ребром A_1D_1 в точке N. Тогда $ACKN$ — искомое сечение.

3. Построим прямую пересечения плоскостей AMC и DD_1KL. Для этого в грани $A_1B_1C_1D_1$ отметим точку P пересечения отрезков D_1K и NM, а в грани $ABCD$ отметим точку Q пересечения отрезков AC и DL. Соединим точки P и Q отрезком.



4. Во вспомогательной плоскости DD_1KL пересечём отрезки PQ и DK в точке O. Это точка и является искомой.

5. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel AC$. Высота BH этого треугольника пересекает отрезок PQ в точке R. Известно, что $CQ = 2{,}5\sqrt{6}$, $QB = 4\sqrt{6}$, $AB = AC = 26$.

а) Найдите длину отрезка BP.

б) Найдите длину отрезка RP.

в) Прямая CR пересекает отрезок BP в точке S. Найдите длину отрезка BS.

Ответ:

а) $BP = 16$

б) $PR = 13$

в) $BS = 6$

Решение:

а) Треугольники PBQ и ABC образуют стандартное положение «пирамида», а следовательно, подобны. Значит, $\frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC} = \frac{4\sqrt{6}}{6{,}5\sqrt{6}} = \frac{8}{13}$, откуда находим $BP = 26 \cdot \frac{8}{13} = 16$. Аналогично можно найти

$$PQ = AC \cdot \frac{8}{13} = 16.$$

б) Обозначим длину отрезка PR через x. Тогда $RQ = 16 - x$.

Так как $PQ \parallel AC$, то $\angle BRP = \angle BHA = 90°$. Следовательно, треугольники PRB и QRB прямоугольные и для них можно записать теорему Пифагора. Имеем

$$BR^2 + (16 - x)^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2;$$
$$BR^2 + x^2 = 16^2.$$

Выражая BR^2 из обоих уравнений можем записать уравнение

$$\left(4\sqrt{6}\right)^2 - (16 - x)^2 = 16^2 - x^2.$$

Раскрывая скобки получаем $16 \cdot 6 - 16^2 + 2 \cdot 16 \cdot x - x^2 = 16^2 - x^2$. Сократим x^2 с обеих сторон и поделим обе части на 16. Получим $6 - 16 + 2x = 16$, откуда $2x = 26$, т. е. $x = 13$.

BR можно было найти и другим способом. Запишем для треугольника PBQ теорему косинусов:

$$QB^2 = QP^2 + BP^2 - 2 \cdot PQ \cdot PB \cdot cos\angle BPQ.$$

С учётом $PQ = PB = 16$ получаем

$\cos\angle BPQ = \frac{2\cdot 16^2 - \left(4\sqrt{6}\right)^2}{2\cdot 16^2} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, после чего $PR = PB \cdot \cos\angle BPQ = 13$.

в) Наконец, для нахождения отрезка BS воспользуемся теоремой Менелая для треугольника PBQ и секущей CRS:

$$\frac{PS}{SB} \cdot \frac{BC}{CQ} \cdot \frac{QR}{RP} = 1.$$

Откуда находим

$$\frac{PS}{SB} = \frac{CQ}{BC} \cdot \frac{RP}{QR} = \frac{6{,}5\sqrt{6}}{2{,}5\sqrt{6}} \cdot \frac{16 - 13}{13} = \frac{13}{5} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{5}.$$

Следовательно, если $BS = 3y$, то $SP = 5y$ и $BP = 8y = 16$, откуда $y = 2$ и $BS = 6$.

6. На рёбрах BC и BD треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки N и M соответственно, причём $CN : NB = DM : MB = 1 : 3$. Точки L и K — середины сторон AC и AD соответственно.

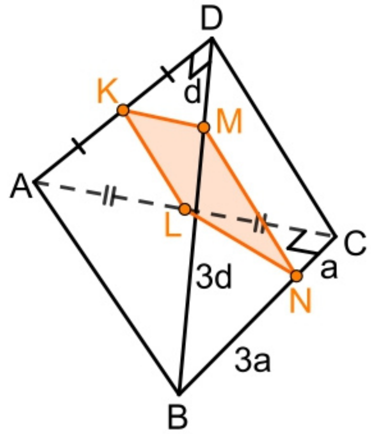
а) Докажите, что L, K, N и M лежат в одной плоскости.

б) Найдите площадь четырёхугольника $LKMN$, если известно, что $\angle ACB = \angle ADB = 90°$, а также $BC = BD = 44$, $CD = 32$, $AB = 4\sqrt{185}$.

Ответ:

б) $S_{LKMN} = 380$

Решение:



а) В грани ACD отрезок KL является средней линией треугольника ACD, а следовательно, параллелен его основанию: $KL \parallel CD$. В треугольнике BDC точки M и N делят стороны BC и BD в одинаковом отношении, а значит, отрезки MN и CD параллельны между собой. Тогда $KL \parallel MN$ по свойству транзитивности параллельности. Из параллельности прямых следует, что они лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

б) В силу параллельности прямых четырёхугольник $LKMN$ является трапецией. Найдём её стороны.

Основание KL является средней линией, а значит,

$$KL = \frac{1}{2}CD = 16.$$

Треугольники BDC и NMB подобны по общему углу и двум прилежащим к ним сторонам. Коэффициент подобия равен $k = MB/DB = 3/4$. Значит, $MN = \frac{3}{4}CD = 24$.

Боковые стороны трапеции найдём из прямоугольных треугольников CNL и DKM. Для этого сначала найдём их катеты. $DM = CN = \frac{1}{4}BD = 11$. По теореме Пифагора в треугольнике ABC находим

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{16 \cdot 185 - 44^2} = 4\sqrt{185 - 121 =} 32.$$

Треугольники ADB и ACB равны по катету и гипотенузе, а следовательно, $AC = AD$ и $DK = CL = 16$.

Теперь по теореме Пифагора мы можем найти

$$LN = \sqrt{CN^2 + CL^2} = \sqrt{11^2 + 16^2} = \sqrt{121 + 256}.$$

Треугольники CLN и DKM равны по двум катетам, а следовательно, и $KM = \sqrt{121 + 256}$.

Рассмотрим трапецию $LKMN$. Она является равнобедренной. Следовательно, если мы опустим высоты LP и KQ на основание MN, то $PQ = LK = 16$, а $NP = QM = \frac{24-16}{2} = 4$.

Тогда из прямоугольного треугольника NLP по теореме Пифагора находим

$$LP = \sqrt{LN^2 - NP^2} = \sqrt{121 + 256 - 4^2} = \sqrt{361} = 19.$$

Осталось найти площадь трапеции по формуле

$$S = \frac{1}{2}h(a + b) : S_{LKMN} = h \cdot \frac{1}{2}(a + b) = 19 \cdot (24 + 16) : 2 = 380.$$

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА
10 класс

Критерии:

1.	**а)**	Верный ответ.	2 балла
		Неверный ответ.	0 баллов
	б)	Указаны любые два из трёх многогранников (вершины могут следовать в любом порядке).	1 балл
		Во всех остальных случаях.	0 баллов
2.		За каждый верный ответ начисляется один балл, за каждый неверный ответ вычитается один балл, если ответ не указан, за этот пункт даётся 0 баллов (то есть отсутствие ответа **не** означает, что ответ неверный). За задание ставится максимум из набранной суммы и 0.	0–4 баллов
3.	**а)**	Сечение построено верно и присутствует описание алгоритма построения.	2 балла
		На рисунке проведены все нужные прямые и отрезки, по которым можно восстановить порядок построения (то есть все точки являются точками пересечения каких-то прямых, проведённых через ранее отмеченные точки, отмечены все вершины сечения, и они соединены между собой), но отсутствует объяснение алгоритма построения.	1 балл
	б)	Получен правильный ответ с обоснованием.	Максимум
		Получен правильный ответ без обоснования.	1 балл
		В процессе решения допущена арифметическая ошибка, но в целом алгоритм подсчёта отношения верный.	*снимается* 1 балл
4.		Проведены все необходимые прямые, отмечена верная точка пересечения и имеется описание алгоритма построения этой точке.	Максимум
		Отсутствует описание алгоритма построения нужной точки, но само построение на рисунке выполнено верно.	*снимается* 1 балл
		Комментарий *Полное обоснование алгоритма построения* ***не требуется.*** *Требуется только описание самого алгоритма.*	

5.	**а)**	Получен верный ответ с обоснованием.	1 балл
		Ответ неверный или обоснование отсутствует или неверно.	0 баллов
	б)	Получен верный ответ с обоснованием.	2 балла
		Получен верный ответ, но обоснование отсутствует или содержит ошибку.	1 балл
		Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, но присутствует верное обоснование решения.	1 балл
		В остальных случаях.	0 баллов
	в)	Получен верный ответ с обоснованием.	2 балла
		Получен верный ответ, но обоснование отсутствует или содержит ошибку.	1 балл
		Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, но присутствует верное обоснование решения.	1 балл
		В остальных случаях.	0 баллов
6.	**а)**	Полное решение.	2 балла
		Доказано, что прямые LK и MN параллельны между собой или, что они обе параллельны одному и тому же ребру пирамиды, но решение не доведено.	1 балл
	б)	Решение верное, но содержит арифметическую ошибку	3 балла
		Верно найдены только все стороны трапеции	2 балла
		Решение в целом верное, но содержит логическую ошибку в одной из формул (например, при подсчёте площади трапеции или при подсчёте длин оснований, или при подсчёте отрезков, на которые разбивают высоты трапеции её основание)	2 балла
		Верно найдены только основания трапеции и все рёбра пирамиды	1 балл
		Во всех остальных случаях	0 баллов