

## 9 класс

1. Число 400 разделили на четыре части так, что если к первой части прибавить 1, от второй отнять 2, третью умножить на 3, а четвертую разделить на 4, то все результаты будут равными. На какие части разделили число 400?

**Ответ:** 62, 65, 21 и 252.

**Решение.** Пусть  $4x$  — последняя (четвертая) часть числа. После деления её на 4 полученный результат, равный  $x$ , совпадает с третьей частью, умноженной на 3, потому третья часть числа —  $\frac{x}{3}$ . Если первую часть увеличить на 1, а вторую уменьшить на 2, — их сумма будет равна  $x + x = 2x$ . Значит, до изменения частей эта сумма была  $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$ . Поскольку сумма всех частей равна 400, имеем уравнение

$$2x + 1 + \frac{x}{3} + 4x = 400, \quad \text{откуда } x = 63,$$

то есть после изменения всех частей результат оказался равным 63. Теперь легко находятся начальные значения всех частей: 62, 65, 21 и 252.

**Критерии.** Только ответ — 2 балла. Правильно составлено уравнение — 2 балла. Решение с арифметическими ошибками — 4 балла. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

2. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек?

**Ответ:** поровну.

**Решение.** Пусть в школе учатся  $m$  мальчиков и  $d$  девочек, и пусть сумма возрастов всех мальчиков равна  $M$ , а сумма возрастов всех девочек равна  $D$ . Тогда средний возраст всех мальчиков — это  $\frac{M}{m}$ , средний возраст всех девочек —  $\frac{D}{d}$ , а средний возраст всех школьников —  $\frac{M+D}{m+d}$ . По условию,

$$\frac{M}{m} + \frac{D}{d} = 2 \cdot \frac{M+D}{m+d}.$$

Это равенство несложно преобразовать к виду  $(d - m)(Md - Dm) = 0$ . Поскольку  $\frac{M}{m} \neq \frac{D}{d}$ , то есть  $Md \neq Dm$ , заключаем, что  $m = d$ . Итак, мальчиков и девочек в школе одинаковое количество.

**Критерии.** Только ответ — 0 баллов. Правильно составлено уравнение для средних — 2 балла. Решение уравнения  $(d - m)(Md - Dm) = 0$ , в котором не разобран случай  $Md = Dm$ , — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Известно, что уравнения  $x^2 + ax + b = 0$  и  $x^3 + bx + a = 0$  имеют общий корень и  $a > b > 0$ . Найдите его.

**Ответ:**  $-1$ .

**Решение.** Домножим первое уравнение на  $x$  и вычтем из него второе. Общий корень исходных уравнений будет и корнем получившегося уравнения

$$(x^3 + ax^2 + bx) - (x^3 + bx + a) = 0 \quad \iff \quad a(x^2 - 1) = 0.$$

У последнего уравнения два корня — это 1 и  $-1$ . Если общий корень  $x = 1$ , то при подстановке его в каждое уравнение получим равенство  $1 + a + b = 0$ , которое в силу условия  $a > b > 0$  выполняться не может, противоречие.

Если же общий корень  $x = -1$ , то при подстановке в уравнения получим  $1 - a + b = 0$ , которое не противоречит условию.

**Замечание.** Возможны и другие способы решения.

**Критерии.** Только ответ — 0 баллов. Не исключены лишние корни — снимаются 2 балла. Отсутствует проверка корня  $x = -1$  на соответствие условию — снимаются ещё 2 балла. Упущен один из возможных корней — не более 3 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. В школьном турнире по шахматам соревновались мальчики и девочки, причём мальчиков было в 5 раз больше, чем девочек. По правилам турнира каждый шахматист играл с каждым другим *дважды*. Сколько всего игроков принимали участие, если известно, что мальчики набрали в сумме ровно в два раза больше очков, чем девочки? (За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков.)

**Ответ:** 6 игроков.

**Решение.** Пусть в турнире принимали участие  $d$  девочек и  $5d$  мальчиков. Тогда всего игроков было  $d+5d = 6d$ ; играя по две партии каждый с каждым они сыграли между собой  $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6d(6d-1) = 6d(6d-1)$  партий. Поскольку в каждой партии разыгрывается одно очко, общее число очков, набранных всеми участниками, также равно  $6d(6d-1)$ . Из них у мальчиков две третьих, а у девочек — одна треть общего количества очков, то есть у девочек  $\frac{1}{3} \cdot 6d(6d-1) = 2d(6d-1)$  очков.

Заметим, что если каждая девочка выиграла у всех мальчиков, то вместе девочки набрали максимум  $2 \cdot d \cdot 5d = 10d^2$  очков, а играя между собой, девочки распределили  $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot d(d-1)$  очков. Поэтому *наибольшее* количество очков, которое могли набрать девочки, равно  $10d^2 + d(d-1) = 11d^2 - d$ . Значит,

$$2d(6d-1) \leq 11d^2 - d \iff d^2 \leq d.$$

Следовательно, девочек не могло быть больше одной. Если девочка была одна, то мальчиков было пятеро, всего — 6 игроков. Шестеро ребят сыграли между собой  $6 \cdot 5 = 30$  партий и разыграли 30 очков. Девочка набрала 10 очков, выиграв у каждого из пяти мальчиков по две партии. Играя между собой, мальчики разыграли оставшиеся 20 очков.

**Критерии.** Только ответ — 0 баллов. Правильный пример — 2 балла. Подсчёт числа очков всех девочек — 2 балла. Оценка числа очков девочек — 4 балла. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

5. Точки  $O$  и  $I$  — центры описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$ ,  $M$  — середина дуги  $AC$  описанной окружности (не содержащей  $B$ ). Известно, что  $AB = 15$ ,  $BC = 7$  и  $MI = MO$ . Найдите  $AC$ .

**Ответ:**  $AC = 13$ .

**Решение.** (Рис. 3). Сначала докажем, что  $MI = MA$  (*лемма о трезубце*).

Действительно, внешний угол  $AIM$  треугольника  $AIB$  равен сумме углов  $BAI$  и  $ABI$ , и так как  $AI$  и  $BI$  — биссектрисы, то  $\angle AIM = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$ . Угол  $IAM$  равен сумме углов  $IAC$  и  $CAM$ . Но  $\angle IAC = \frac{1}{2}\angle A$ , а  $\angle CAM = \angle CBM = \frac{1}{2}\angle B$  — как вписанные.

Отсюда следует, что  $\angle IAM = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \angle AIM$ , и значит, треугольник  $AMI$  — равнобедренный,  $MI = MA$ . По условию  $MO = MI$ , поэтому по лемме о трезубце  $AO = MO = MI = MA$ . Значит, треугольник  $AOM$  — равносторонний и  $\angle AOM = 60^\circ$ . Поскольку центральный угол  $AOM$  вдвое больше вписанного угла  $ABM$ , имеем  $\frac{1}{2}\angle B = 30^\circ$ , то есть  $\angle B = 60^\circ$ .

По теореме косинусов  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos 60^\circ = 13^2$ .

**Критерии.** Ответ без объяснений — 0 баллов. Доказано, что угол  $B$  равен  $60^\circ$  — 5 баллов. За отсутствие доказательства леммы о трезубце баллы не снижаются. Полное решение — 7 баллов.

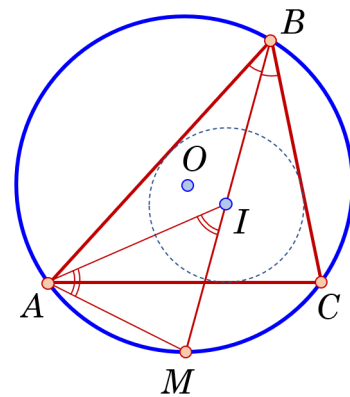


Рис. 3