11 класс

1. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек?

Ответ: *поровну.*

Решение. Пусть в школе учатся m мальчиков и d девочек, и пусть сумма возрастов всех мальчиков равна M, а сумма возрастов всех девочек равна D. Тогда средний возраст всех мальчиков — это $\frac{M}{m}$, средний возраст всех девочек — $\frac{D}{d}$, а средний возраст всех школьников — $\frac{M+D}{m+d}$. По условию,

$$\frac{M}{m}+\frac{D}{d}=2\cdot\frac{M+D}{m+d}\,.$$

Это равенство несложно преобразовать к виду $(d-m)(Md-Dm)=0$. Поскольку $\frac{M}{m}\neq\frac{D}{d}$, то есть $Md\neq Dm$, заключаем, что $m=d$. Итак, мальчиков и девочек в школе одинаковое количество.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильно составлено уравнение для средних — 2 балла. Решение уравнения $(d-m)(Md-Dm)=0$, в котором не разобран случай $Md=Dm$, — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x и y справедливо неравенство:

$$2^x x+2^y y\geqslant 2^y x+2^x y\,.$$

Решение. Разность левой и правой частей неравенства несложно разложить на множители, она равна $(x-y)(2^x-2^y)$. Функция $f(x)=2^x$ возрастает при $x\geqslant 0$, поэтому если $x\geqslant y$, то $2^x\geqslant 2^y$, и наоборот, если $y\geqslant x$, то $2^y\geqslant 2^x$.

Во всех случаях $(x-y)(2^x-2^y)\geqslant 0$, а это равносильно требуемому неравенству.

Критерии. Разложение на множители — 1 балл. Отмечено, что при $x\geqslant y$ верно $2^x\geqslant 2^y$ — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

3. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, M — середина дуги AC описанной окружности (не содержащей B). Известно, что $AB=15$, $BC=7$ и $MI=MO$. Найдите AC.

Ответ: $AC=13$.

Решение. (Рис. 5). Сначала докажем, что $MI=MA$ (*лемма о трезубце*).

Действительно, внешний угол AIM треугольника AIB равен сумме углов BAI и ABI, и так как AI и BI — биссектрисы, то $\angle AIM=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B$. Угол IAM равен сумме углов IAC и CAM. Но $\angle IAC=\frac{1}{2}\angle A$, а $\angle CAM=\angle CBM=\frac{1}{2}\angle B$ — как вписанные.

Отсюда следует, что $\angle IAM=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=\angle AIM$, и значит, треугольник AMI — равнобедренный, $MI=MA$. По условию $MO=MI$, поэтому по лемме о трезубце $AO=MO=MI=MA$. Значит, треугольник AOM — равносторонний и $\angle AOM=60^\circ$. Поскольку центральный угол AOM вдвое больше вписанного угла ABM, имеем $\frac{1}{2}\angle B=30^\circ$, то есть $\angle B=60^\circ$.

По теореме косинусов $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cos 60^\circ=13^2$.

Критерии. Ответ без объяснений — 0 баллов. Доказано, что угол B равен 60° — 5 баллов. За отсутствие доказательства леммы о трезубце баллы не снижаются. Полное решение — 7 баллов.

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что 3^a+4^b является квадратом целого числа.

Ответ: $a = b = 2$.

Решение. Из равенства $3^a + 4^b = n^2$ ясно, что число n — нечётное, и поэтому $n = 2x + 1$. Тогда исходное равенство можно записать так: $3^a + 4^b = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$, откуда следует, что число 3^a имеет остаток 1 при делении на 4. Последнее возможно только при условии чётного a, то есть $a = 2y$ для некоторого натурального y, и значит,

$$9^y + 4^b = (2x+1)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2^{2b} = (2x+1)^2 - (3^y)^2 = (2x+1-3^y)(2x+1+3^y).$$

Оба сомножителя в правой части являются степенями двойки, их сумма равна $2(2x+1) = 4x+2$, то есть не делится на 4, и значит, ровно одно из них не делится на 4. Единственная степень двойки с таким свойством — это 2^1, поэтому

$$\begin{cases} 2x+1-3^y = 2, \\ 2x+1+3^y = 2^{2b-1}. \end{cases}$$

Вычитая равенства друг из друга, получим $3^y = 2^{2b-2} - 1 = (2^{b-1}-1)(2^{b-1}+1)$. Каждое из чисел $2^{b-1}-1$ и $2^{b-1}+1$ является степенью тройки, причём разность этих чисел равна 2. Единственная пара таких степеней — это $3^0 = 1$ и 3^1. (Для любых других степеней тройки их разность больше 2.) Значит, $2^{b-1} - 1 = 1$, то есть $b = 2$. Тогда $3^y = 2^{2b-2} - 1 = 3$, $y = 1$, отсюда $a = 2y = 2$. В итоге получаем $3^2 + 4^2 = 5^2$, то есть $n = 5$.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Доказана чётность числа a — ещё 1 балл. Доказано, что сомножители являются степенями двойки или тройки, — до 3 баллов. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.

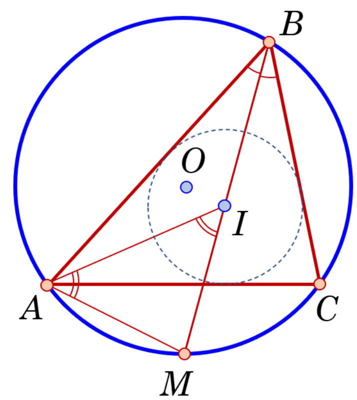

Рис. 5

5. Даны n различных положительных чисел. Из них составляются суммы с любым числом слагаемых от 1 до n.

а) Какое наименьшее количество различных сумм можно получить?

б) Какое наибольшее количество различных сумм можно получить?

Ответ: *а*) $\frac{1}{2}n(n+1)$; *б*) $2^n - 1$.

Решение. Можно считать, что исходные положительные числа расположены в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Рассмотрим числа

$$\begin{array}{llllll} a_1, & a_2, & \ldots & a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n, \\ a_1 + a_n, & a_2 + a_n, & \ldots & a_{n-2} + a_n, & a_{n-1} + a_n, & \\ a_1 + a_{n-1} + a_n, & a_2 + a_{n-1} + a_n, & \ldots & a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, & & \\ \multicolumn{6}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,} \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n. & & & & & \end{array}$$

Очевидно, что здесь каждое число больше предыдущего, поэтому все выписанные числа различны. Их количество $n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ соответствует требованиям задачи.

Осталось привести пример, в котором больше, чем $\frac{1}{2}n(n+1)$ различных сумм получить не удастся. Для этого подойдет набор из первых n натуральных чисел, из которых нельзя составить больше, чем $\frac{1}{2}n(n+1)$ различных сумм: эти суммы — все натуральные числа от 1 до $1 + 2 + \ldots + +n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

б) Каждое число a_i входит или не входит в рассматриваемую сумму. Кроме того, нужно ещё исключить сумму, не содержащую ни одного слагаемого, поэтому различных сумм из n слагаемых можно составить не более, чем $2^n - 1$.

Числа 1, 10, 10^2, ..., 10^{n-1} дают пример n различных чисел, из которых можно образовать наибольшее число различных сумм. Сумма любых k чисел этого набора — это число, в десятичной записи которого используются только 1 и 0. Каждая такая сумма может быть представлена в виде

n-элементного упорядоченного набора из 0 и 1. Поскольку на каждом месте набора могут быть только две цифры, их общее количество равно $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. Единственный невозможный набор, составленный из n нулей, необходимо исключить, поэтому общее количество допустимых наборов равно $2^n - 1$.

Критерии. Решение каждого из пунктов *а*) и *б*) — по 3 балла. В пункте *а*) доказано, что различных сумм не менее $\frac{1}{2}n(n+1)$ — 2 балла. Пример с наименьшим числом различных сумм — 1 балл. В пункте *б*) доказано, что различных сумм не более $(2^n - 1)$ — 1 балл. Пример с наибольшим числом различных сумм — 2 балла. Полное решение обоих пунктов — 7 баллов.