

11 класс

1. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек?

2. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x и y справедливо неравенство:

$$2^x x + 2^y y \geq 2^y x + 2^x y.$$

3. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC , M — середина дуги AC описанной окружности (не содержащей B). Известно, что $AB = 15$, $BC = 7$ и $MI = MO$. Найдите AC .

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что $3^a + 4^b$ является квадратом целого числа.

5. Даны n различных положительных чисел. Из них составляются суммы с любым числом слагаемых от 1 до n .

- а) Какое наименьшее количество различных сумм можно получить?
- б) Какое наибольшее количество различных сумм можно получить?

Продолжительность олимпиады — 4 часа.