ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 2021–2022 уч. г. МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
11 класс

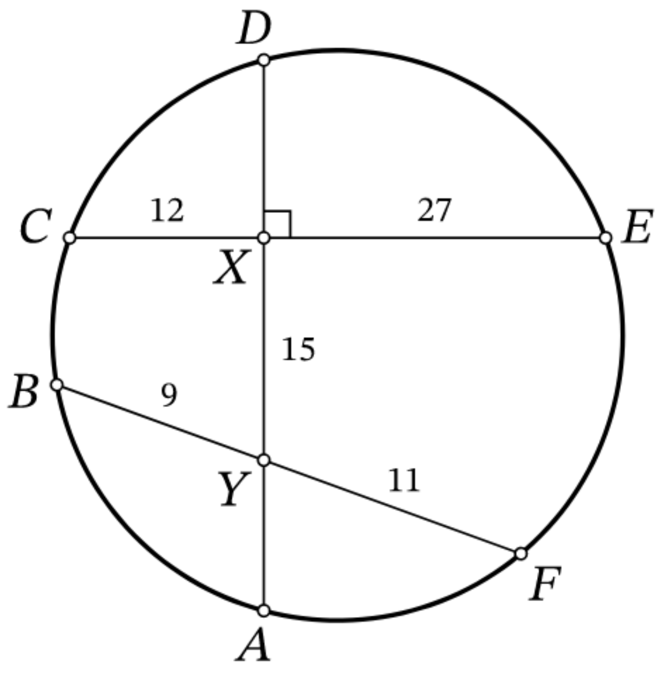
1. (4 балла) По кругу выписаны 12 различных натуральных чисел, одно из которых равно 1. Любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо на 7. Какое наибольшее значение может принимать наибольшее выписанное число?

2. (4 балла) Пусть α и β — действительные корни уравнения $x^2 - x - 2021 = 0$, причём $\alpha > \beta$. Обозначим $A = \alpha^2 - 2\beta^2 + 2\alpha\beta + 3\beta + 7$. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее A.

3. Пусть k_1 — наименьшее натуральное число, являющееся корнем уравнения $\sin k^\circ = \sin 334k^\circ$.
3.1 (2 балла) Найдите k_1.
3.2 (2 балла) Найдите наименьший корень этого же уравнения, являющийся натуральным числом, большим k_1.

4. (4 балла) В спортивной школе занимается 55 человек, каждый из которых либо теннисист, либо шахматист. Известно, что нет четырёх шахматистов, которые имели бы поровну друзей среди теннисистов. Какое наибольшее количество шахматистов может заниматься в этой школе?

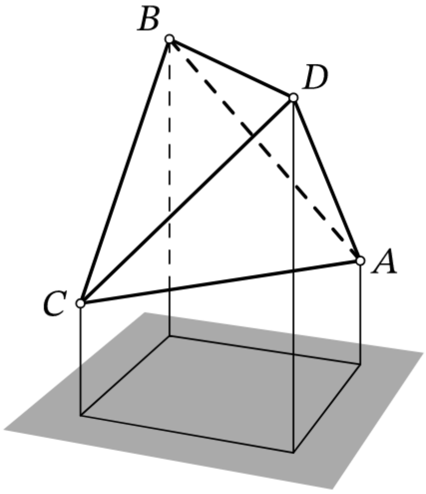
5. На окружности по часовой стрелке расположены точки A, B, C, D, E, F, как изображено на рисунке. Хорды AD и CE пересекаются в точке X под прямым углом, хорды AD и BF пересекаются в точке Y.
Известно, что $CX = 12$, $XE = 27$, $XY = 15$, $BY = 9$, $YF = 11$.



5.1 (2 балла) Найдите длину отрезка AD.
5.2 (2 балла) Найдите радиус окружности.

6. (4 балла) Дан набор чисел $\{-1, -2, -3, \ldots, -26\}$. На доску выписали всевозможные подмножества данного набора, в которых есть хотя бы 2 числа. Для каждого выписанного подмножества вычислили произведение всех чисел, принадлежащих данному подмножеству. Чему равна сумма всех этих произведений?

7. (4 балла) Все вершины правильного тетраэдра $ABCD$ находятся по одну сторону от плоскости α. Оказалось, что проекции вершин тетраэдра на плоскость α являются вершинами некоторого квадрата. Найдите значение величины AB^2, если известно, что расстояния от точек A и B до плоскости α равны 17 и 21 соответственно.



8. (4 балла) В каждой клетке полоски $1 \times N$ стоит либо плюс, либо минус. Ваня умеет совершать следующую операцию: выбрать любые три клетки (не обязательно последовательные), одна из которых находится ровно посередине между двумя другими клетками, и поменять три знака в этих клетках на противоположные. Число N назовём позитивным, если из расстановки из N минусов Ваня такими операциями может получить расстановку из N плюсов.

Рассмотрим числа 3, 4, 5, …, 1400. Сколько среди них позитивных?