

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2021–2022 уч. г. МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
10 класс**

1. (4 балла) Найдите любое натуральное x такое, что значение выражения $2^x + 2^8 + 2^{11}$ является квадратом натурального числа.

2. По кругу лежат 36 шариков, каждый из которых либо красный, либо синий (шарики каждого из этих цветов присутствуют). Известно, что:

- для любого красного шарика найдётся ровно один красный шарик такой, что между ними лежит ровно один шарик;
- для любого красного шарика найдётся ровно один синий шарик такой, что между ними лежат ровно три шарика.

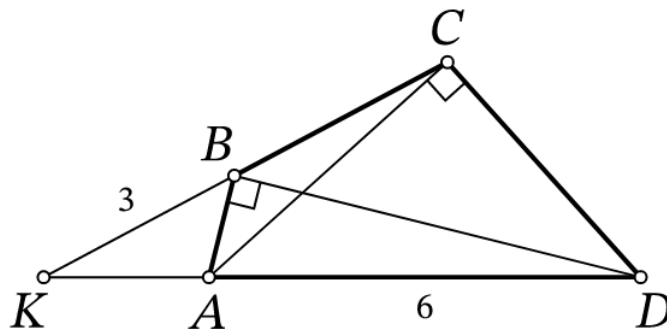
2.1 (2 балла) Пусть нет двух рядом лежащих красных шариков. Сколько всего красных шариков может лежать по кругу? Укажите все возможные варианты.

Если ответом являются несколько чисел, то они вводятся все — каждое число в отдельное поле ввода в произвольном порядке.

2.2. (2 балла) Пусть есть два рядом лежащих красных шарика. Сколько всего красных шариков может лежать по кругу? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 24.

3. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, $\angle CAD = 42^\circ$. Лучи CB и DA пересекаются в точке K . Известно, что $BK = 3$, $AD = 6$.



3.1 (2 балла) Сколько градусов составляет угол BKA ?

3.2 (2 балла) Сколько градусов составляет угол BAC ?

4. (4 балла) Дана клетчатая прямоугольная таблица. Известно, что существует:

- ровно 940 способов вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×2 ;
- ровно 894 способа вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×3 .

Сколько существует способов вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×5 ? При подсчёте количества способов вырезания прямоугольника учитываются и вертикальные, и горизонтальные расположения.

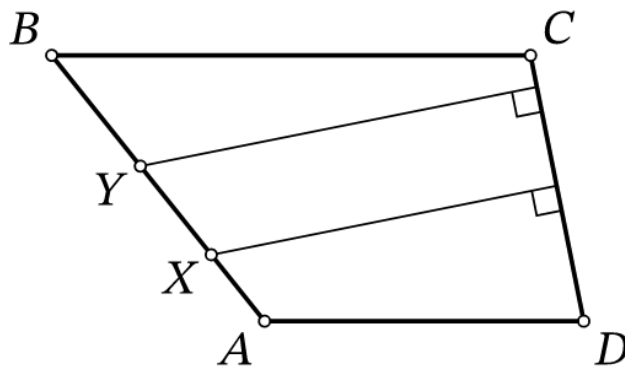
5. (4 балла) Несколько сладкоежек приняли участие в состязании по поеданию конфет. Каждый участник съел целое количество конфет, причём любые два участника съели разное количество конфет. Подводя итоги состязания, жюри упорядочило всех людей по убыванию количества съеденных конфет (например, победитель съел больше всего конфет, а человек, занявший последнее место, съел меньше всего конфет).

Известно, что:

- победитель съел в 14 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые;
- участник, занявший третье место, съел в 20 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые;
- участник, занявший последнее место, съел в 21 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые.

Сколько сладкоежек участвовало в состязании?

6. Дана трапеция $ABCD$. Отрезки AB и CD — её боковые стороны — равны 24 и 10 соответственно. На стороне AB отмечены точки X и Y так, что $AX = 6$, $XY = 8$, $YB = 10$. Известно, что расстояния от точек X и Y до прямой CD равны 23 и 27 соответственно.



6.1 (1 балл) Найдите площадь треугольника ACD .

6.2 (3 балла) Найдите площадь трапеции $ABCD$.

7. (4 балла) На острове живёт 23 рыцаря и 200 лжецов; имена всех жителей различны. Знающий об этом приехавший турист попросил каждого из 223 жителей написать на листке 200 имён лжецов. Каждый рыцарь написал верно 200 имён лжецов, а каждый лжец написал произвольный список из 200 имён, в котором точно нет его собственного имени. Какое наибольшее количество лжецов турист сможет гарантированно определить по этим данным?

8. (4 балла) Неотрицательные числа a , b , c в сумме дают 1. Найдите наибольшее возможное значение величины

$$(a + 3b + 5c) \cdot \left(a + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} \right).$$