

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2021–2022 уч. г. МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
9 класс**

1. Для натурального числа a произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a$ обозначается как $a!$.

1.1 (2 балла) Найдите наименьшее натуральное число m такое, что $m!$ делится на $23m$.

Ответ: 24.

1.2 (2 балла) Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $n!$ делится на $33n$.

Ответ: 12.

2. В четырёх классах школы учится более 70 детей, все они пришли на собрание параллели (других детей на собрании не было).

Каждую пришедшую девочку спросили: «Сколько пришло человек из твоего класса, включая тебя?»

Каждого пришедшего мальчика спросили: «Сколько пришло мальчиков из твоего класса, включая тебя?»

Среди ответов встретились числа 7, 9, 10, 12, 15, 16, 19 и 21 (все дети ответили верно).

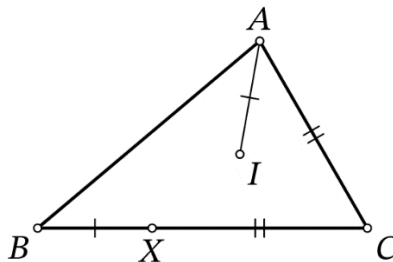
2.1 (1 балл) Сколько детей учится в самом большом классе параллели?

Ответ: 21.

2.1 (3 балла) Сколько девочек пришло на собрание параллели?

Ответ: 33.

3. Точка I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . На стороне BC отметили точку X . Оказалось, что $AI = BX$, $AC = CX$, $\angle ABC = 42^\circ$.



3.1 (2 балла) Сколько градусов составляет угол BIX ?

Ответ: 21.

3.2 (2 балла) Сколько градусов составляет угол BCA ?

Ответ: 54.

4. (4 балла) Фома и Ерёма ехали по прямой дороге в Москву на повозке с постоянной скоростью.

- В 12:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы?»
- Ерёма ответил: «82».
- В 13:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы?»
- Ерёма ответил: «71».
- В 15:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы?»
- Ерёма ответил: «46».

Известно, что Ерёма каждый раз округлял расстояние до ближайшего целого, а если таких было два — то до любого на свой выбор.

В 16:00 Фома снова спросил: «Сколько вёрст до Москвы?» В этот раз Ерёма уже дал точный ответ, не округляя его. Что ответил Ерёма?

Ответ: 34.5.

5. Про действительные ненулевые числа a, b, c известно, что

$$a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab.$$

5.1 (1 балл) Какие положительные значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{4c}{a+b}?$$

Укажите все возможные варианты. Если выражение не может принимать положительные значения, то в качестве ответа напишите 0.

Если ответом являются несколько чисел, то они вводятся все — каждое число в отдельное поле ввода в произвольном порядке.

Ответ: 3,5.

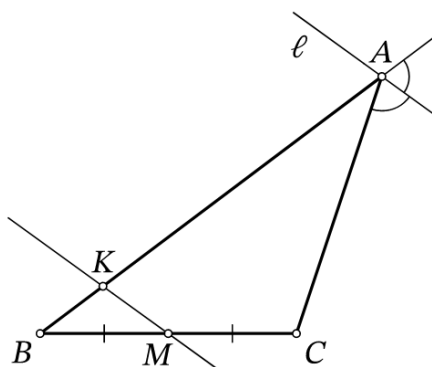
5.2 (3 балла) Какие отрицательные значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{4c}{a+b}?$$

Укажите все возможные варианты. Если выражение не может принимать отрицательные значения, то в качестве ответа напишите 0.

Ответ: -7.

6. (4 балла) Дан треугольник ABC , точка M — середина стороны BC . Пусть l — биссектриса внешнего угла A треугольника ABC . Прямая, проходящая через M и параллельная l , пересекает сторону AB в точке K . Найдите длину отрезка AK , если $AB = 23$ и $AC = 8$.



Ответ: 15,5.

7. (4 балла) На доску выписаны числа $1, 2, 3, \dots, 57$. Какое наибольшее количество чисел среди них можно выбрать так, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ровно в 2,5 раза?

Ответ: 48.

8. (4 балла) На плоскости отмечено 36 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары отмеченных точек соединены отрезком так, что из каждой отмеченной точки выходит не более 3 отрезков.

Какое наибольшее количество различных замкнутых 4-звенных ломаных может получиться?

Вершинами ломаной могут быть только отмеченные точки, а звеньями — только проведенные отрезки. Неважно, где у ломаной начало и как она ориентирована: например, если для некоторых 4 отмеченных точек A, B, C, D проведены отрезки AB, BC, CD, DA , то $ABCD, BCDA, CDAB, DABC, ADCB, BADC, CBAD, DCBA$ — это одна и та же ломаная.

Ответ: 54.