

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Найдите корень уравнения

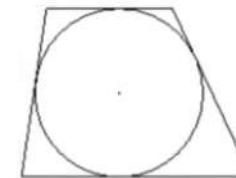
$$\sqrt{28 - 2x} = 2.$$

Ответ: _____.

2 В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпала больше раз, чем орёл.

Ответ: _____.

3 Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 15 и 22. Найдите среднюю линию трапеции.



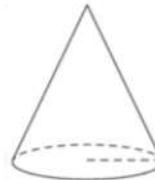
Ответ: _____.

4 Найдите значение выражения

$$30 \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ - 43.$$

Ответ: _____.

5 Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



Ответ: _____.

6

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{34}{3}x^2 - \frac{280}{3}x - \frac{18}{5}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: _____.

7

Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$$T(t) = T_0 + bt + at^2,$$

где t — время (в мин.), $T_0 = 680$ К, $a = -16 \frac{\text{К}}{\text{мин}^2}$, $b = 224$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента выше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: _____.

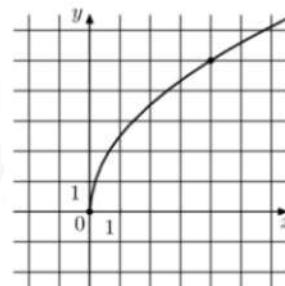
8

На изготовлении 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: _____.

9

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(6,76)$.



Ответ: _____.

10

В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: _____.

11

Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 441}{x} \text{ на отрезке } [2; 32].$$

Ответ: _____.

*Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.*

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12

а) Решите уравнение

$$\frac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{5}\sin x}}{\sqrt{11 \sin x}} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

13

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA . Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M .

а) Докажите, что $AM = AD$.

б) Точка N – середина AM . Найдите SN , если $AD = 6$.

14

Решите неравенство

$$\log_5((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5(x^2-7x+12) + \log_5(5-x).$$

15

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

- 16** Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что $ABCD$ – трапеция.
 б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если известно, что радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.

- 17** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

- 18** Последовательность a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

- а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.
 б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?
 в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 6$?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтёρского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
 Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_47937899
 (также доступны другие варианты для скачивания)

**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	12	
2	0,25	
3	18,5	
4	-13	
5	3	
6	6	
7	5	
8	8	
9	6,5	
10	0,9975	
11	42	
12	a) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{17\pi}{4}$	
13	$\sqrt{15}$	
14	[2; 3)	
15	7 млн	
16	$\frac{\sqrt{65}}{2}$	
17	$[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$	
18	а) 2, 7, 11, 14, 6 б) да, например, 6, 7, 7, 6, 3 в) 16	

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными.** За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

12

а) Решите уравнение $\frac{9\sin 2x - 3\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{11}\sin x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

а) $\begin{cases} 9\sin 2x - 3\sqrt{3}\sin x = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$

б) $\sin x > 0$

1) $3\sin 2x = 3\sqrt{3}\sin x$
 $2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$
 $\sin x \cdot (2\cos x - \sqrt{3}) = 0$
 $\sin x = 0$
 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 Нет решений
 $\tau.k. \sin x > 0$
 $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 (не подходит)

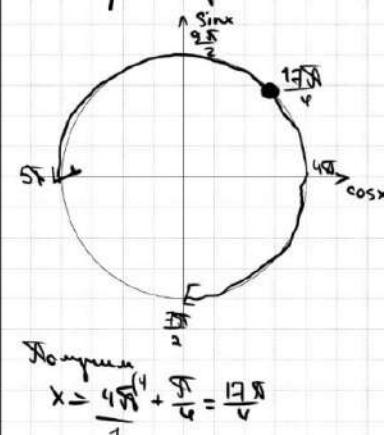
ОТВЕТ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) 12π

ИСТОЧНИКИ:

FPI (старый блок)
 Старт 29.01.2020
 Старт 26.01.2017

FD4042

д) Отберём корни с помощью окружности:



Получим
 $x = \frac{4\pi}{1} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

ИСТОЧНИКИ:

FPI (старый блок)
 Старт 29.01.2020
 Старт 26.01.2017

Тренировочный вариант №7 от 18.10.2021

13

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA . Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M .

а) Докажите, что $AM = AD$.

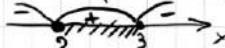
б) Точка N — середина AM . Найдите SN , если $AD = 6$.

14

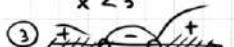
Решите неравенство $\log_3((3-x)(x^2+2)) \geq \log_3(x^2-7x+12) + \log_3(5-x)$.

- ① $(3-x)(x^2+2) \geq (x-3)(x-4)(5-x)$
- ② $(3-x)(x^2+2) > 0$
- ③ $(x-3)(x-4) > 0$
- ④ $5-x > 0$

$$\begin{aligned} ① \quad & (3-x)(x^2+2)+(3-x)(x-4)\cdot(5-x) \geq 0 \\ & (3-x)\cdot(x^2+2-x^2+x+9x-20) \geq 0 \\ & (3-x)(9x-18) \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} ② \quad & (3-x)\cdot(x^2+2) > 0 \\ & 3-x > 0 \\ & x < 3 \end{aligned}$$

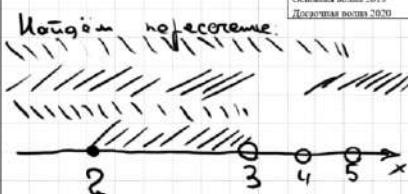


$$\begin{aligned} ③ \quad & x < 5 \\ ④ \quad & x < 5 \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $[2; 3)$

ИСТОЧНИКИ:

ЕЭПИ (старый блок)
Основная волна 2019
Дополнительная волна 2020

**15**

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через

четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

Лист № 21 - месяц окт
Чек - месяц ноября

x - сумма пополнения вклада

Дата Сумма вклада

1/9/21	10 млн
2/9/21	10 · 1,1
3/9/22	10 · 1,1 ²
4/9/23	10 · 1,1 ³ + x
5/9/23	10 · 1,1 ³ + 1,1 x
6/9/24	10 · 1,1 ⁴ + 1,1 x + x
7/9/24	10 · 1,1 ⁴ + 1,1 x + 1,1 x ≥ 30

$$10 \cdot 1,4641 + 1,1x + 1,1x \geq 30$$

$$2,31x \geq 30 - 14,641$$

$$2,31x \geq 15,359$$

$$x \geq \frac{15,359}{2,310}$$

$$x \geq 6 \frac{1499}{2310}$$

$$\Rightarrow x_{\text{мин}} = 7$$

ОТВЕТ: 7 млн

ИСТОЧНИКИ:

Ященко 2019 (36 вер)
Досрочная волна 2016
Основная волна (Резерв) 2016

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

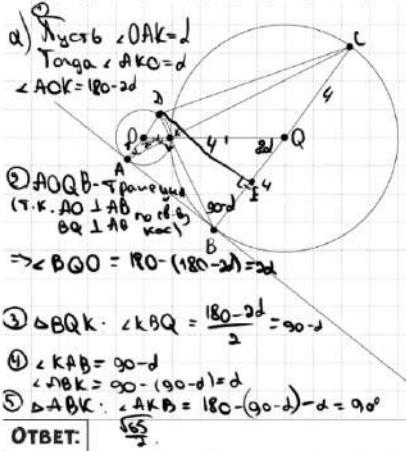
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а вторая – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

а) Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если известно, что радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.



$$\begin{aligned} \text{⑥ } & \angle AKB = 90^\circ \Rightarrow AD \text{- диаметр} \\ & \angle BKC = 90^\circ \Rightarrow BC \text{- диаметр} \\ & \Rightarrow AD \perp AB \\ & BC \perp AB \\ & \Rightarrow AD \parallel BC \\ & \Rightarrow ABCD \text{- трапеция.} \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА СИНОУСОВ

$$\text{⑦ } \frac{CD}{\sin(90^\circ)} = 2R \quad \frac{CD}{\cos d} = 2R$$

$$\text{⑧ } AB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$CD = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\text{⑨ } \triangle BDE \quad \sin \angle DBE = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\text{⑩ } \frac{8\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 2R \quad R = \frac{8\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = 4$$

Ответ:

ИСТОЧНИКИ:
Логарифмы (Резник) 2010

17

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
 $\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$

$$\begin{aligned} \text{① } & x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ \text{② } & 3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2 \\ & x^4 + 2a \cdot x^3 + 3x^2 + a^2 \cdot x^2 = 0 \\ & x^4 + 2a \cdot x^3 - x^2 + a^2 \cdot x^2 = 0 \\ & x^2 \cdot (x^2 + 2ax - 1 + a^2) = 0 \\ & x_1 = 0 \quad x^2 + 2ax - 1 + a^2 = 0 \\ & (x+a)^2 - 1^2 = 0 \\ & (x-a-1)(x-a+1) = 0 \\ & x_2 = 1-a \quad x_3 = -a-1 \end{aligned}$$

Найдём, при каких a найдёны три корня?

$$\begin{cases} 1-a \leq -a-1 \\ 1-a \neq 0 \\ -a-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 2 \\ a \neq \pm 1 \\ a \neq -1 \end{cases}$$

Ответ: $[-2, -1] \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$

ИСТОЧНИКИ:
ЕВ (старый блок)
ГПР (новый блок)
Олимпиады 2010

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b	
ИЛИ	
имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ	
при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,	
ИЛИ	
обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

18

Последовательность a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

- а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.
б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 6$?

а) $\underline{4} \quad \underline{10} \quad \underline{11} \quad \underline{10} \quad \underline{5}$

б) $\begin{array}{r} \underline{1} \\ \underline{3} \quad \underline{4} \quad \underline{4} \quad \underline{3} \quad \underline{1} \end{array}$

Всего $a=1$
 $f=1$
На место b не может быть 1 или 2
 $\Rightarrow b \geq 3$
 $\Rightarrow b=3$

Тогда $c=4$ (чтобы $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 40$)
«Открытие» первое 3 числа можно
сделать

а) Гравем
Ответ: б) Да, см н. в)
в) 16

Источники:
Основные нормы 2016

$$a_n > \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2a_n > a_{n-1} + a_{n+1}$$

$$a_n - a_{n-1} > a_{n+1} - a_n$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad 6 \quad 1 \quad 7 \\ a_{n-1} \quad a_n \quad a_{n+1} \end{array}$$

Допускаем 16

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Министром России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4