

**Единый государственный экзамен  
по МАТЕМАТИКЕ  
Профильный уровень**

**Инструкция по выполнению работы**

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

*Желаем успеха!*

**Справочные материалы**

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

*Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

**Часть 1**

- 1** Найдите корень уравнения

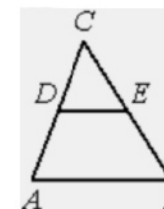
$$(x + 9)^2 = 36x.$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2** Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3** В треугольнике  $ABC$   $DE$  – средняя линия. Площадь треугольника  $CDE$  равна 24. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .



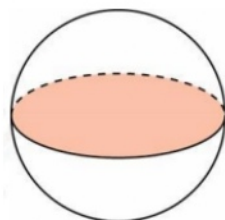
Ответ: \_\_\_\_\_.

4 Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{1,4}}{\sqrt{0,42}}$$

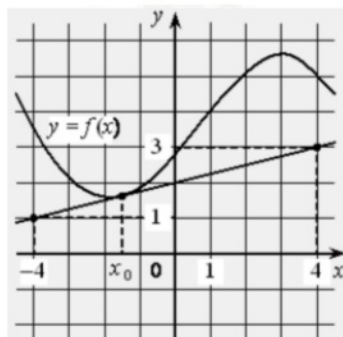
Ответ: \_\_\_\_\_.

5 Площадь поверхности шара равна 12. Найдите площадь большого круга шара.



Ответ: \_\_\_\_\_.

6 На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

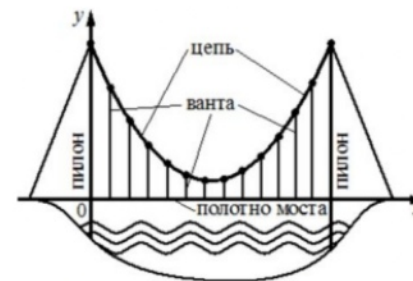
7 На рисунке изображена схема моста. Вертикальные *пилоны* связаны провисающей *цепью*. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают *полотно* моста, называются *вантами*.

Введём систему координат:

ось  $Oy$  направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось  $Ox$  направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задаётся формулой

$$y = 0,0043x^2 - 0,74x + 35,$$

где  $x$  и  $y$  измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

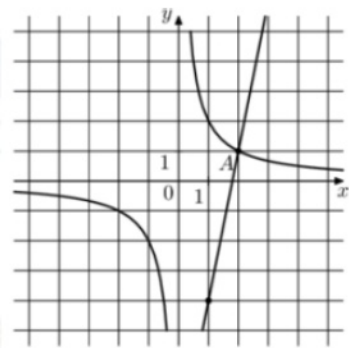


Ответ: \_\_\_\_\_.

8 Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 200 км – со скоростью 100 км/ч, а затем 160 км – со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 9 На рисунке изображены графики функций  $f(x) = \frac{k}{x}$  и  $g(x) = ax + b$ , которые пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Найдите абсциссу точки  $B$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 55% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 Найдите наибольшее значение функции  $y = \ln(x + 6)^3 - 3x$  на отрезке  $[-5, 5; 0]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.*

*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.*

**Часть 2**

*Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.*

- 12 а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$$

- 13 В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания  $AB$  равна 3, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $\sqrt{2}$ . На рёбрах  $AB$ ,  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = B_1N = C_1K = 1$ .

- а) Пусть  $L$  – точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $AC$ . Докажите, что  $MNKL$  – квадрат.

- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

- 14 Решите неравенство

$$(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62 \cdot (9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geq 0.$$

- 15 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите  $r$ , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 160 000 рублей, а во второй год – 240 000 рублей.

**16** В прямоугольную трапецию  $ABCD$  с прямым углом при вершине  $A$  и острым углом при вершине  $D$  вписана окружность с центром  $O$ . Прямая  $DO$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ , а прямая  $CO$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $K$ .

- а) Докажите, что  $\angle AMO = \angle DKO$ .  
б) Найдите площадь треугольника  $AOM$ , если  $BC = 10$  и  $AD = 15$ .

**17** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - xy - 4y + 4}{\sqrt{x+2}} = 0, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**18** В каждой клетке квадратной таблицы  $6 \times 6$  стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

- а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?  
б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?  
в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.*

**Система оценивания экзаменационной работы по математике  
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	9	
2	0,5	
3	96	
4	2	
5	3	
6	0,25	
7	4,27	
8	90	
9	-0,2	
10	0,9	
11	15	
12	а) $-\arctg 3 + \pi n, -\arctg 2 + \pi n; n \in Z$ б) $-\pi - \arctg 2; -\pi - \arctg 3$	
13	3,75	
14	$\{0\} \cup [2; +\infty)$	
15	20	
16	30	
17	$\{-3\} \cup [0; 3)$	
18	а) да б) нет в) $31/6$	

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий  
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

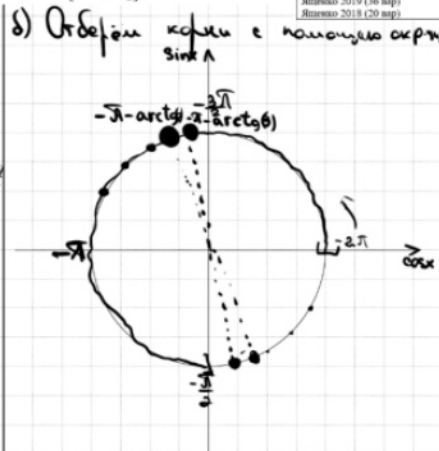
**Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.**

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

- 12 а) Решите уравнение  $\text{tg}^2 x + 5 \text{tg} x + 6 = 0$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$ .

**Источники:**  
 ЕГЭ (старый банк)  
 Ященко 2020 (16 вар)  
 Ященко 2020 (10 вар)  
 Ященко 2019 (16 вар)  
 Ященко 2018 (20 вар)

а) Пусть  $\text{tg} x = t$   
 $t^2 + 5t + 6 = 0$   
 $t = -2$        $t = -3$   
 $\text{tg} x = -2$        $\text{tg} x = -3$   
 $x = -\arctg 2 + \pi n$        $x = -\arctg 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$



**ОТВЕТ:** а)  $-\arctg 2 + \pi n, -\arctg 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$   
 б)  $-\pi - \arctg 2; -\pi - \arctg 3$

- 13 В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  сторона основания  $AB$  равна 3, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $\sqrt{2}$ . На ребрах  $AB, A_1 B_1$  и  $B_1 C_1$  отмечены точки  $M, N$  и  $K$  соответственно причём  $AM = B_1 N = C_1 K = 1$ .  
 а) Пусть  $L$  — точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $AC$ . Докажите, что  $MNKL$  — квадрат.  
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

**Источники:**  
 ЕГЭ (старый банк)  
 ЕГЭ (новый банк)  
 Досрочный восток 2016  
 Година 2019



**ОТВЕТ:** 3,75.  
 $S_{\text{сеч.}} = \sqrt{3}^2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,75$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ	1

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 211115

обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**14** Решите неравенство  $(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62 \cdot (9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geq 0$ .

**Источники:**  
Основная волна 2021  
Дополнительная волна (Резерв) 2017.

Пусть  $(9^x - 2 \cdot 3^x) = t$

$$t^2 - 62t - 63 \geq 0$$

$$\begin{cases} t \leq -1 \\ t \geq 63 \end{cases}$$

$$9^x - 2 \cdot 3^x \leq -1 \quad 9^x - 2 \cdot 3^x - 63 \geq 0$$

$$9^x - 2 \cdot 3^x + 1 \leq 0$$

Пусть  $3^x = a$

$$a^2 - 2a + 1 \leq 0 \quad a^2 - 2a - 63 \geq 0$$

$$(a-1)^2 \leq 0$$

$$a-1=0$$

$$a=1$$

Ответ:  $\{0\} \cup [2; +\infty)$

$$\begin{cases} a=1 \\ a \leq -7 \\ a \geq 9 \end{cases}$$

$$3^x = 1 \quad 3^x \leq -7 \quad 3^x \geq 3^2$$

$$x=0 \quad \emptyset \quad x \geq 2$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**15** В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:  
– каждый январь долг увеличивается на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;  
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.  
Найдите  $r$ , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 160 000 рублей, а во второй год – 240 000 рублей.

**Источники:**  
ФПР (старый банк)  
ФПР (новый банк)  
Январь 2021 (36 лет)  
Январь 2020 (36 лет)  
Январь 2019 (36 лет)  
Сентябрь 2015  
Основная волна 2020  
Основная волна 2017  
Основная волна 2015

Пусть  $\text{юль} - \text{месяц}$   $\text{июль} = b$

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right) = b$$

$$1 + \frac{r}{100} = 1,2$$

$$\frac{r}{100} = 0,2$$

$$r = 20\%$$

Дата	Сумма долга
4 20	300 тыс
9 21	$300 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 300 \cdot b$
11 21	$300b - 160$
9 22	$300b^2 - 160 \cdot b$
11 22	$300b^2 - 160b - 240 = 0 \quad   :20$

$$15b^2 - 8b - 12 = 0$$

$$D = 64 + 420 = 28^2$$

$$b = \frac{8 \pm 28}{30}$$

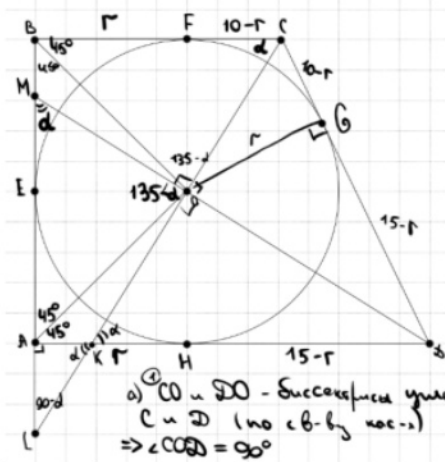
$$b_1 = \frac{36}{30} \quad b_2 = \frac{-20}{30} = -1,2$$

Ответ: 20

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**16** В прямоугольную трапецию  $ABCD$  с прямым углом при вершине  $A$  и острым углом при вершине  $D$  вписана окружность с центром  $O$ . Прямая  $DO$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ , а прямая  $CO$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $K$ .

- а) Докажите, что  $\angle AMO = \angle DKO$ .  
 б) Найдите площадь треугольника  $AOM$ , если  $BC = 10$  и  $AD = 15$ .



**Источники:**  
 Основная волна 2017  
**СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ**  
 Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

① Пусть  $\angle DKO = d$   
 $\text{Tang} \angle AKC = d$   
 $\angle ACK = 180 - 90 - d = 90 - d$

②  $\triangle AOM$ :  
 $\angle AOC = 180 - 90 - (90 - d) = d$   
 $\Rightarrow \angle AMO = d = \angle DKO$

③ Пусть  $r$  - радиус окр-ти  
 $\text{Tang} BF = r = AH$   
 $CF = 10 - r = CG$  (по св-ву кас.)  
 $DK = 15 - r = 2G$

④  $\triangle COD$ :  
 $r^2 = (10 - r)(15 - r)$   
 $r^2 = 150 - 25r + r^2$   
 $r = 6$

⑤  $\triangle AOM = \triangle BOC$  по 2П.  
 $\Rightarrow S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$

**Источники:**  
 Высота в прямоугольном треугольнике  
 $h^2 = de$

**ОТВЕТ:** 30

**17** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

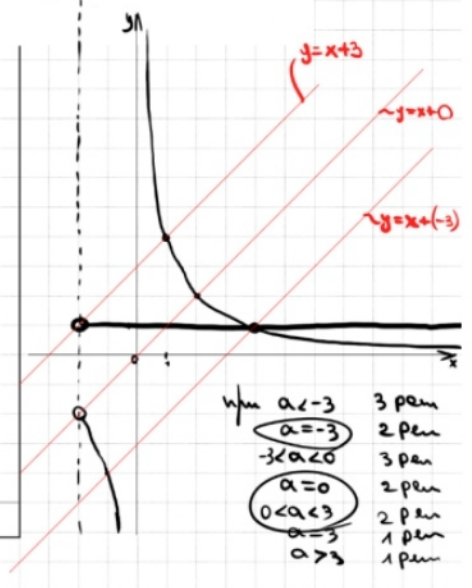
$$\begin{cases} xy^2 - xy - 4y + 4 = 0, \\ \sqrt{x+2} \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$\begin{cases} xy^2 - xy - 4y + 4 = 0 \\ x + 2 > 0 \\ y = x + a \end{cases}$

Упростим  $xy^2 - xy - 4y + 4 = 0$   
 $xy(y-1) - 4(y-1) = 0$   
 $(y-1)(xy-4) = 0$

Получаем  $\begin{cases} y = 1 \\ xy = 4 \\ y = \frac{1}{x} \\ x > -2 \\ y = x + a \end{cases}$



**ОТВЕТ:**  $\{-3\} \cup [0; 3]$

**Источники:**  
 Досрочная волна 2018

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , ИЛИ при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 211115



**18** В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

**Источники:**  
Основная волна (Резерв) 2017

- а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?
- б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?
- в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?



а)  $\sum_{i=1}^6 \min_{j=1}^6 a_{ij} = 6$   
 б)  $\sum_{i=1}^6 \min_{j=1}^6 a_{ij} = 36$  } единственной способ отминим в 6 раз

в) Если Петя получил 36 все числа в таблице д.е. 6, то тогда сумма Васи будет не 6, т.е. не меньше

б) Если сумма Васи  $\min = 6$ , то  $\sum_{i=1}^6 \min_{j=1}^6 a_{ij} \leq 31$   
 $\Rightarrow$  Отличие в  $\frac{31}{6}$  раз



а) Если сумма Васи = 7, то отличие  $\leq \frac{36}{7}$

Сравним  $\frac{31}{6} > \frac{36}{7}$   
 $\frac{217}{42} > \frac{216}{42}$   
 $\Rightarrow \frac{31}{6}$  - наибольшее отличие.

ОТВЕТ:	а) Да
	б) Нет
	в) $\frac{31}{6}$

Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а); – обоснованное решение пункта б); – искомая оценка в пункте в); – пример в пункте в), обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2