Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2021-2022 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 9 класс

$\boxed{9.1}$ *В таблицу 3×3 расставили неповторяющиеся натуральные числа, не большие 20. Затем перемножили числа в каждой строке и в каждом столбце. Могло ли оказаться, что все 6 произведений – полные квадраты?*

Решение: да, могло, например, так:

5	10	8
15	20	12
3	2	6

Критерии:

- Приведён правильный пример и показано, что произведения полные квадраты, — 7 баллов;
- Пример правильный, но не показано, что произведения полные квадраты, — 6 баллов.

$\boxed{9.2}$ *Найдите все натуральные числа, которые при сложении с суммой своих цифр дают 2021.*

Решение: Так как остатки от деления числа и суммы его цифр на 9 совпадают, а число 2021 имеет остаток 5, то искомое число n давало остаток 7. Поскольку $n < 2999$, его сумма цифр не больше 29 и при этом имеет остаток 7 при делении на 9. Тогда она равна 7, 16 или 25, откуда $n = 2014, 2005$ или 1996. Из этих чисел 2014 и 1996 подходят, а 2005 — нет.

Возможен вариант решения, не рассматривающий остатки от деления на 9, но ограничивающий количество вариантов числа n через оценку суммы цифр.

Критерии:

- Доказано, что $n \equiv 7 \pmod 9$ — 2 балла;
- Указаны оба ответа — 1 балл;
- Показано, что сумма цифр не превосходит 29 или другое разумно маленькое число — 2 балла.
- Если используется перебор большого числа вариантов, то он должен быть приведён в решении, иначе за эту часть решения — 0 баллов.

$\boxed{9.3}$ *Докажите, что при всех положительных x верно неравенство*

$$(1+x+x^2)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4) \leqslant (1+x+x^2+x^3)^2.$$

Решение 1: При $x = 1$ неравенство верно. При прочих x домножим обе части на $(1-x)^2$ и получим $(1-x^3)(1-x^5) \leqslant (1-x^4)^2$. После раскрытия скобок это сводится к неравенству $x^3 + x^5 \geqslant 2x^4$, равносильное $x^3(x-1)^2 \geqslant 0$.

Решение 2: Можно сразу аккуратно раскрыть все скобки. После сокращения останется $x^3 \geqslant 0$.

Критерии:

- Над неравенством без обоснования проводятся неравносильные преобразования или преобразования, равносильность которых неочевидна — снимается до 2 баллов.
- Для сворачивания сумм используется формула сокращенного умножения с делением или умножением на $(x-1)$, но не проверяется отдельно справедливость неравенства при $x = 1$ — снимается 1 балл.

$\boxed{9.4}$ *В $\triangle ABC$ провели биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке O. Оказалось, что площади $\triangle OC_1B$ и $\triangle OB_1C$ совпадают. Верно ли, что $\triangle ABC$ равнобедренный?*

Решение 1: Обозначим длины сторон треугольника $AB = c, BC = a, CA = b$. Из равенства площадей заключаем, что равны площади $\triangle BB_1C$ и $\triangle CC_1B$, имеющие общее основание, поэтому равны их высоты из точек B_1 и C_1, поэтому $BC \parallel B_1C_1$. Тогда треугольники ABC и AC_1B_1 подобны, значит $AB_1 : AC = AC_1 : AB$. При этом, используя свойство биссектрисы делить сторону в отношении прилегающих сторон, получаем $AB_1 : AC = c : (a+c)$, а $AC_1 : AB = b : (a+b)$. Разность этих отношений с одной стороны 0, а с другой $a(b-c) : ((a+b)(a+c))$. Значит, $b = c$.

Решение 2: Опять заметим $BC \parallel B_1C_1$. У треугольников OB_1C и OC_1B равны площади и высоты из вершины O (т.к. O – центр вписанной окружности), поэтому $B_1C = C_1B$. Тогда в четырёхугольнике BC_1B_1C две противоположные стороны параллельны, а две другие равны. Значит, это параллелограмм или равнобедренная трапеция. Параллелограммом он быть не может (иначе $\angle B_1CB + \angle C_1BC = 180°$), поэтому углы при вершинах B и C равны.

Критерии:

- Замечена только параллельность прямых BC и B_1C_1 или только равенство отрезков BC_1 и B_1C — 2 балла.
- Используется утверждение "четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие равны — равнобедренная трапеция" (а случай параллелограмма не разбирается) — снимается 1 балл.
- Выведены формулы для длин отрезков, на которые биссектриса разбивает сторону, — 1 балл;
- Если эти формулы отрезков используются правильно, но без вывода, — баллы не снимать.

$\boxed{9.5}$ *Числа x, y и z удовлетворяют равенствам*

$$xy + yz + zx = xyz, \quad x + y + z = 1.$$

Какие значения может принимать сумма $x^3 + y^3 + z^3$?

Решение 1: Пусть $xyz = p$. Тогда из условия $xy + yz + zx$ тоже равно p. Значит, по теореме Виета числа x, y и z — это корни многочлена $t^3 - t^2 + pt - p$. Но число 1 является корнем такого многочлена, поэтому одно из чисел равно 1. Тогда два других числа противоположны, а сумма кубов всех трёх равна 1.

Решение 2: Из условия $xyz = xy + yz + zx$. Тогда $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 3(xy + yz + zx) + (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x + y + z)^2 = 1$.

Решение 3: Из условия

$$0 = (xyz - xy - yz - zx) + (x + y + z - 1) = (x - 1)(y - 1)(z - 1).$$

Поэтому одно из чисел равно 1. Тогда два других числа противоположны, а сумма кубов всех трёх равна 1.

Критерии:

- Без доказательства указано, что одно из чисел равно 1, и из этого выведен ответ в задаче — 1 балл;
- Доказано, что одно из чисел равно 1, но задача не доведена до ответа — 6 баллов.