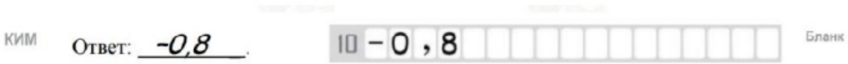
Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.



При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Найдите корень уравнения

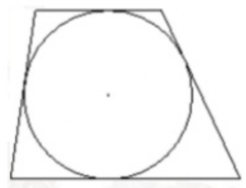
$$\sqrt{28-2x} = 2.$$

Ответ: ____________________________.

2 В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпала больше раз, чем орёл.

Ответ: ____________________________.

3 Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 15 и 22. Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ: ____________________________.

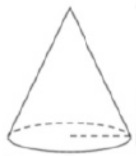
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 211018

4 Найдите значение выражения

$30\,\mathrm{tg}\,3^\circ \cdot \mathrm{tg}\,87^\circ - 43.$

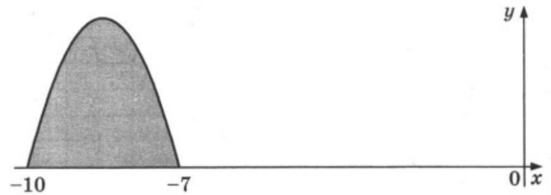
Ответ: ___________________________.

5 Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



Ответ: ___________________________.

6 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{34}{3}x^2 - \frac{280}{3}x - \frac{18}{5}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: ___________________________.

7 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$T(t) = T_0 + bt + at^2,$

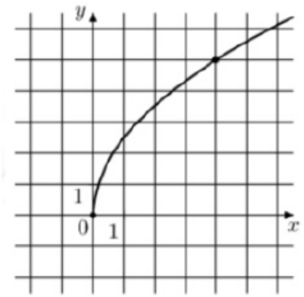
где t – время (в мин.), $T_0 = 680$ К, $a = -16\ \frac{\text{К}}{\text{мин}^2}$, $b = 224$К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ___________________________.

8 На изготовлении 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: ___________________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(6{,}76)$.



Ответ: ___________________________.

10 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: ___________________________.

11 Найдите наименьшее значение функции

$y = \frac{x^2+441}{x}$ на отрезке $[2; 32]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\frac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2}\sin x}}{\sqrt{11 \sin x}} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA. Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M.

а) Докажите, что $AM = AD$.
б) Точка N – середина AM. Найдите SN, если $AD = 6$.

14 Решите неравенство

$$\log_5\left((3-x)(x^2+2)\right) \geq \log_5(x^2-7x+12) + \log_5(5-x).$$

15 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

16 Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что $ABCD$ – трапеция.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD, если известно, что радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

18 Последовательность a_1, a_2, …, a_n $(n \geq 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.
б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 6$?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	12	
2	0,25	
3	18,5	
4	-13	
5	3	
6	6	
7	5	
8	8	
9	6,5	
10	0,9975	
11	42	
12	а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z$ б) $\frac{17\pi}{4}$	
13	$\sqrt{15}$	
14	$[2;3)$	
15	7 млн	
16	$\frac{\sqrt{65}}{2}$	
17	$[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$	
18	а) 2, 7, 11, 14, 6 б) да, например, 6, 7, 7, 6, 3 в) 16	

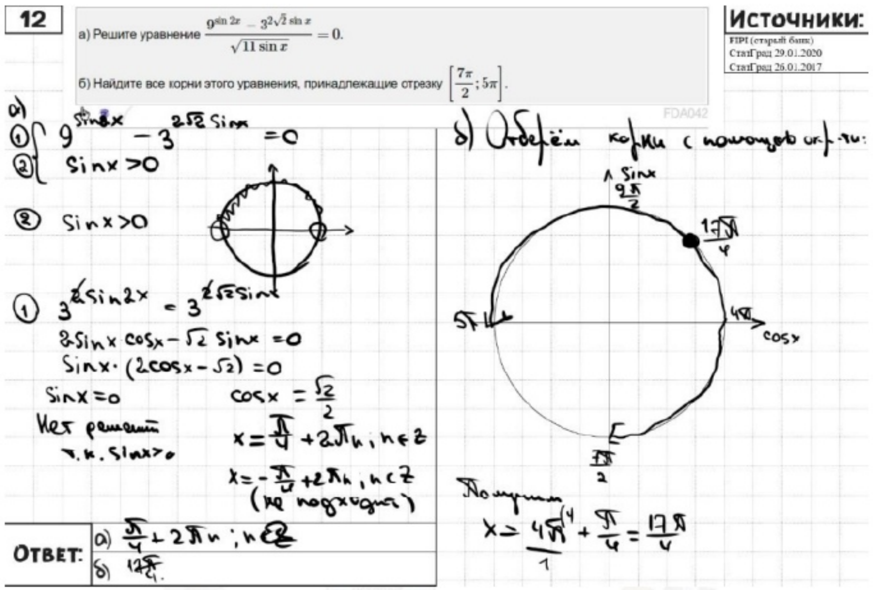
Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

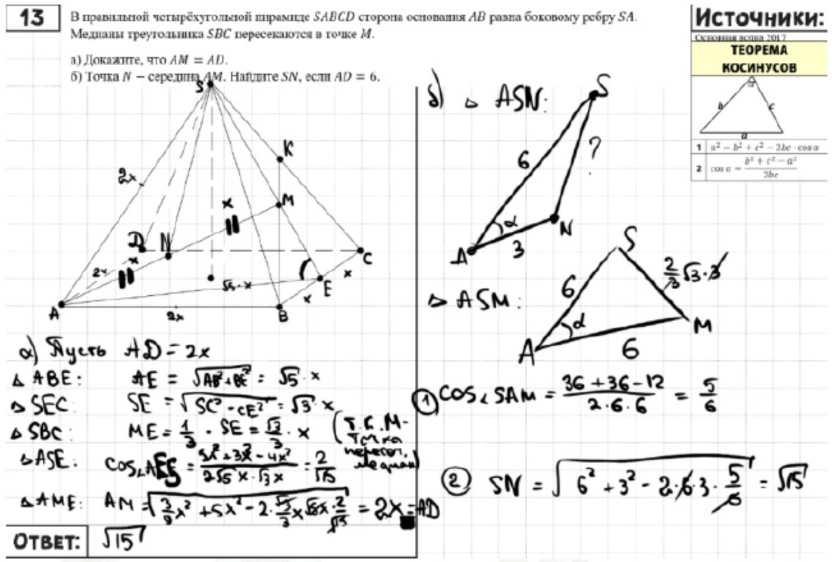
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



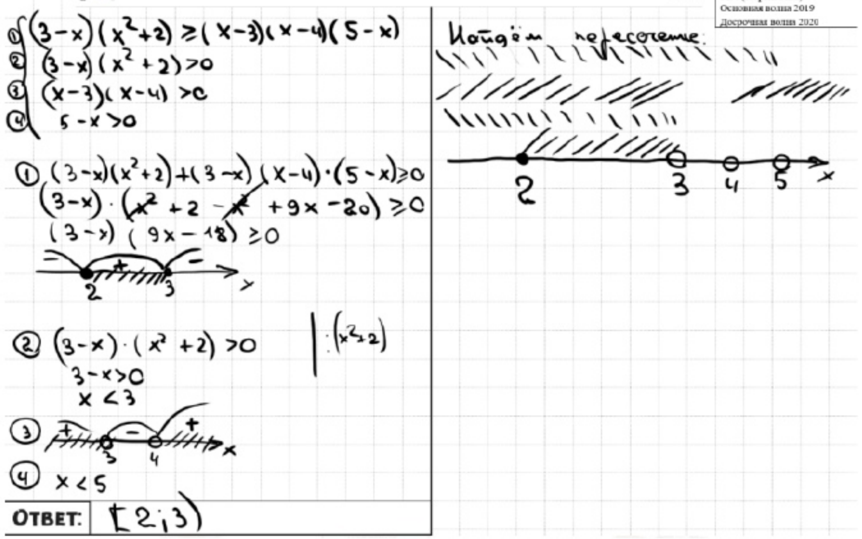
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

14 Решите неравенство $\log_5((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5(x^2-7x+12) + \log_5(5-x)$.

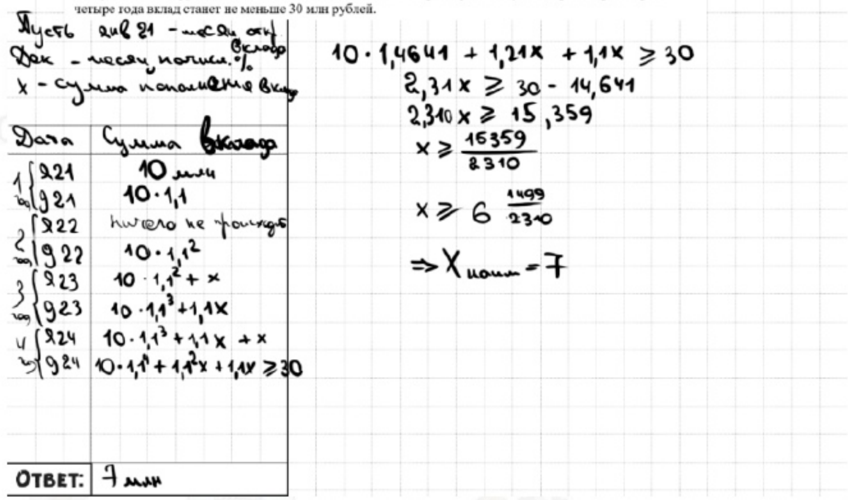
Источники: FIPI (старый банк); Основная волна 2019; Досрочная волна 2020



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

Источники: Ященко 2018 (36 вар); Досрочная волна 2016; Основная волна (Резерв) 2016



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 211018

16 Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

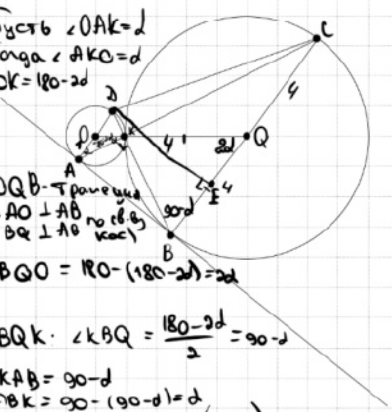
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD, если известно, что радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.

Источники: Досрочная волна (Резерв) 2019

а) Пусть $\angle OAK = \alpha$

Тогда $\angle AKO = \alpha$

$\angle AOK = 180 - 2\alpha$



① $AOQB$ - трапеция (т.к. $AO \perp AB$, $BQ \perp AB$ по св-ву кас.)

$\Rightarrow \angle BQO = 180 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$

③ $\triangle BQK$: $\angle KBQ = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$

④ $\angle KAB = 90 - \alpha$

$\angle ABK = 90 - (90 - \alpha) = \alpha$

⑤ $\triangle ABK$: $\angle AKB = 180 - (90 - \alpha) - \alpha = 90°$

⑥ $\angle AKD = 90° \Rightarrow AD$ - диаметр

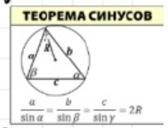
$\angle BKC = 90° \Rightarrow BC$ - диаметр

$\Rightarrow AD \perp AB$

$BC \perp AB$

$\Rightarrow AD \parallel BC$

$\Rightarrow ABCD$ - трапеция.



б) $\frac{CD}{\sin(90 - \alpha)} = 2R$ $\frac{CD}{\cos\alpha} = 2R$

① $AB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$CD = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

② $\triangle BDE$ $\sin\angle DBE = \frac{4}{2\sqrt5} = \frac{2}{\sqrt5}$

③ $\frac{2\sqrt{13}}{\frac{2}{\sqrt5}} = 2R$ $R = \frac{\sqrt{65}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{65}}{2}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2+2ax+1} = x^2+ax+1$$

имеет ровно три различных корня.

Источники: ФИПИ (старый банк), ФИПИ (новый банк), Основная волна 2016

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 & ① \\ 3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + (ax+1))^2 & ② \end{cases}$$

② $3x^2 + \cancel{2ax} + \cancel{1} = x^4 + 2x^2\cdot(ax+1) + a^2x^2 + \cancel{2ax} + \cancel{1}$

$x^4 + 2a\cdot x^3 + 2x^2 - 3x^2 + a^2x^2 = 0$

$x^4 + 2a\cdot x^3 - x^2 + a^2\cdot x^2 = 0$

$x^2\cdot(x^2 + 2ax - 1 + a^2) = 0$

$x_1 = 0$ $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$

$(x+a)^2 - 1^2 = 0$

$(x+a-1)(x+a+1) = 0$

$x_2 = 1 - a$ $x_3 = -a - 1$

Чтобы все три корня были различны

$$\begin{cases} 1-a \neq -a-1 \\ 1-a \neq 0 \\ -a-1 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a - \text{любое} \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases}$$

Найдём, при каких a найденные три удовл. нер-ву ①

$x_1 = 0$ $x_2 = 1 - a$ $x_3 = -a - 1$

$0^2 + a\cdot 0 + 1 \geq 0$ $(1-a)^2 + a(1-a) + 1 \geq 0$

a - любое $1 - 2a + a^2 + a - a^2 + 1 \geq 0$

$a \leq 2$

$(-a-1)^2 + a\cdot(-a-1) + 1 \geq 0$

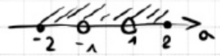
$(a+1)^2 - a^2 - a + 1 \geq 0$

$a^2 + 2a + 1 - a^2 - a + 1 \geq 0$

$a \geq -2$

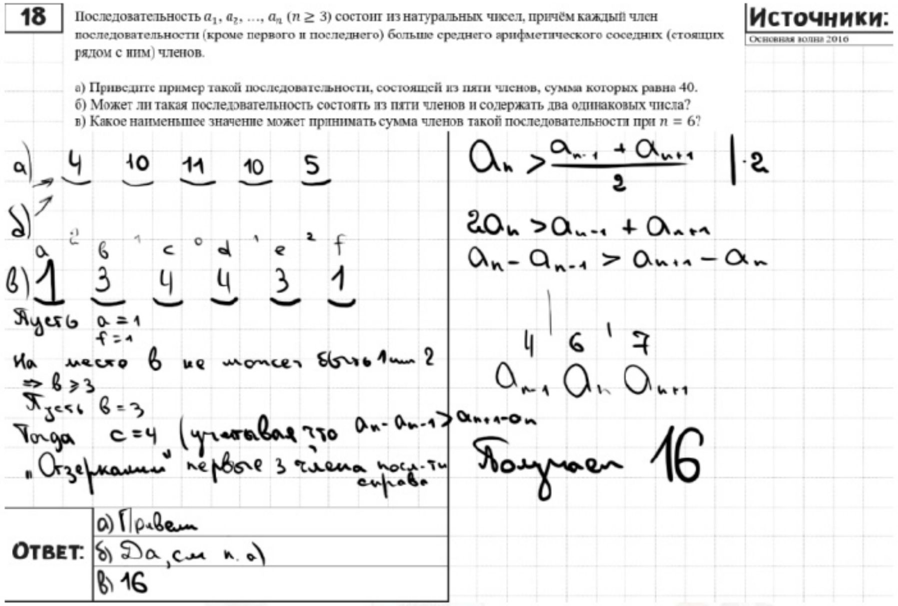
Получаем

$$\begin{cases} a \neq \pm 1 \\ a \geq -2 \\ a \leq 2 \end{cases}$$



Ответ: $[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *a*	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *a*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4


18 Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geq 3$) состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.
б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 6$?

Источники: Основная волна 2016

а) 4 10 11 10 5
б)
a b c d e f
в) 1 3 4 4 3 1
Пусть a = 1, f = 1
На место b не может быть 1 или 2 ⇒ b ≥ 3
Пусть b = 3
Тогда c = 4 (учитывая что $a_n - a_{n-1} > a_{n+1} - a_n$)
„Отзеркалим" первые 3 члена посл-ти справа

$a_n > \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ |·2
$2a_n > a_{n-1} + a_{n+1}$
$a_n - a_{n-1} > a_{n+1} - a_n$
4 6 7
a_{n-1} a_n a_{n+1}
Получаем 16

Ответ: а) Пример; б) Да, см. п. а); в) 16

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.