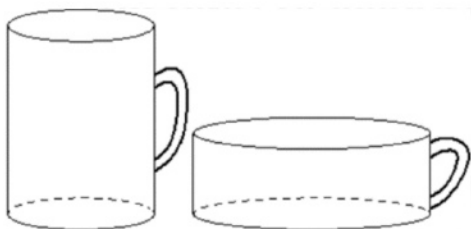


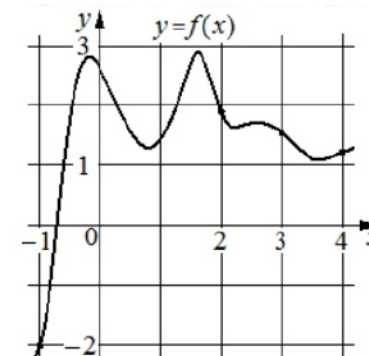
4 Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.
 Ответ: _____.

5 Первая цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в три раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



Ответ: _____.

6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-1, 2, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: _____.

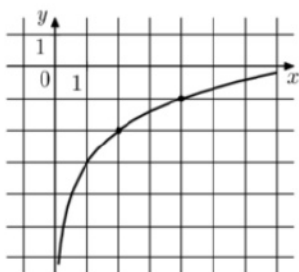
7 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 120 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит 320 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Ответ: _____.

8 Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй – 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ: _____.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(32)$.



Ответ: _____.

10 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,35. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Ответ: _____.

11 Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 9x + 9) \cdot e^{x+27}.$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

13 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

14 Решите неравенство

$$\frac{3 \lg^2 x - 8}{\lg^2 x - 4} \geq 2.$$

15 15-го марта в банке был взят кредит на некоторую сумму на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 30-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какая сумма была взята в кредит, если общая сумма выплат после его погашения составила 555 тысяч рублей?

16 В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N ; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

- а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.
б) Пусть P – точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP:PN$.

17 Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(ax^2 - 2x)^2 + (a^2 - a + 2)(ax^2 - 2x) - a^2(a - 2) = 0$$

имеет ровно два решения.

18 На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A , среднее арифметическое чисел во второй группе равно B . (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

- а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.
б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.
в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	4,5	
2	0,55	
3	78	
4	-0,96	
5	4,5	
6	-1	
7	8	
8	30	
9	2	
10	0,5	
11	7	
12	а) $\log_{\frac{3}{2}} 3; \log_{\frac{3}{2}} 4$ б) $\log_{\frac{3}{2}} 3$	
13	55	
14	$(0; 0,01) \cup \{1\} \cup (100; +\infty)$	
15	400 000	
16	3:1	
17	$\{-2\} \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$	
18	а) «10 пятёрок» и «10 четвёрок и 10 троек» б) ■ в) $4 \frac{14}{29}$	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

12 а) Решите уравнение $3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^x \cdot 4^x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

Источники:
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018
Сборник задач 2014

а) $\frac{9^x}{4^x} - 7 \cdot \frac{6^x}{4^x} + 12 = 0$
 $(\frac{9}{4})^x - 7 \cdot (\frac{3}{2})^x + 12 = 0$
 Пусть $(\frac{3}{2})^x = t$
 $t^2 - 7t + 12 = 0$
 $t = 3$ $(\frac{3}{2})^x = 3$ $x = \log_{\frac{3}{2}} 3$
 $t = 4$ $(\frac{3}{2})^x = 4$ $x = \log_{\frac{3}{2}} 4$

б) Сравним $2 < \log_3 3 < 3$
 $\log_{2,25} 2,25 < \log_{2,25} 3 < \log_{2,25} 3,375$
 $2,25 < \log_{2,25} 3 \in [2, 3]$

Сравним $2 < \log_{2,4} 4 > 3$
 $2,25 < 4 > 3,375$
 $\Rightarrow \log_{2,4} 4 \in [2, 3]$

ОТВЕТ: а) $\log_{\frac{3}{2}} 3$; $\log_{\frac{3}{2}} 4$
 б) $\log_{2,25} 3$

13 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На ребрах $AB, A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

Источники:
Гордих #14 2019
Сборник 2018
Досрочная волна 2016

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

$MNKL$ – ромб
 ① $LN = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2} = 10 = KM$
 $\Rightarrow MNKL$ – ромб с равными диагоналями \Rightarrow квадрат

д) ① $PA_1 = 1$ т.е. $\triangle PA_1 N \sim \triangle D_1 N K$
 ② $\triangle PA_1 E \sim \triangle AEM$ по 2 уг.
 $\Rightarrow E$ – середина AA_1
 Аналогично F – середина CC_1

③ $S_{сеч} = 2 \cdot S_{EFML} = 2 \cdot \frac{6\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 55$

① $NK = \sqrt{5^2 + 4^2} = 5\sqrt{2}$
 ② $NK \parallel ML \Rightarrow \triangle D_1 N K \sim \triangle BML$
 $\Rightarrow BL = 5$
 $ML = 5\sqrt{2}$
 ③ $NM = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{2} = KL$

ОТВЕТ: 55

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

14 Решите неравенство $\frac{3\lg^2 x - 8}{\lg^2 x - 4} \geq 2$.

Источники:
Основная волна 2017
Дисциплина волна (Резерв) 2015

$\log x = t$

$$\frac{3t^2 - 8}{t^2 - 4} - \frac{2}{1} \geq 0$$

$$\frac{3t^2 - 8 - 2t^2 + 8}{t^2 - 4} \geq 0$$

$$\frac{t^2}{t^2 - 4} \geq 0$$

$\begin{cases} t < -2 \\ t = 0 \\ t > 2 \end{cases}$

ОТВЕТ: $(0; 0,04) \cup \{1\} \cup (100; +\infty)$

$\log x < \log \frac{1}{100} \quad \log x = \log 1 \quad \log x > \log 100$
 $\begin{cases} x < \frac{1}{100} \\ x = 1 \\ x > 100 \end{cases}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 15-го марта в банке был взят кредит на некоторую сумму на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 30-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какая сумма была взята в кредит, если общая сумма выплат после его погашения составила 555 тысяч рублей?

Источники:
ГЭИ (новый банк)
Основная волна 2018
Основная волна (Резерв) 2021

Пусть S - сумма кредита
 $b = 1,02$

7 число - день платежа
 x - сумма на которую уменьш. долг первый 30 мес.
Дата сумма дата

15-го	S	29-го	$15 \cdot S - 29x$
1-го	Sb	1-го	$Sb - 29bx$
15-го	$S - x$	30-го	$2 \cdot Sb - 30bx - 5 + 30x$
1-го	$Sb - bx$	1-го	$Sb - 30bx = 100$
15-го	$S - 2x$	31-го	$3 \cdot Sb - 31bx - 5 + 30x$
		15-го	0

ОТВЕТ: 400 тыс.

$Sb - S + x + Sb - 29bx - 5 + 30x \cdot 15 + 100b = 555$

$2Sb - 2S + 31x - 29bx \cdot 15 + 100b = 555$

$30Sb - 30S + 465x - 435bx + 100b = 555$

$30,6 \cdot S - 30S + 465x - 443,7x + 102 = 555$

$0,6 \cdot S + 21,3 \cdot x = 453$

$0,6 \cdot (100 + 30x) + 21,3x = 453$

$60 + 18x + 21,3x = 453$

$39,3 \cdot x = 393$

$x = 10$

$S - 30x = 100$

$S = 100 + 30x = 100 + 30 \cdot 10 = 400$ тыс.

Первые 30 выплат отпр. професси. Восстанавливаем Ф-юй $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

О.р.в. = 555
первые 30 + 31 выпл. = 555

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярна AM , пересекает сторону AC в точке N ; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.
б) Пусть P – точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP:PN$.

Источники:
Январь 2018
Основная волна (Резерв) 2014
ТЕОРЕМА О БИСЕКТРИСЕ

① $\triangle CMN$ – равноб.
СК – биссектриса и мед.
 $\Rightarrow MK = KN$

② $\triangle PMN$ – равноб. (т.к. PK – медиана)
 $\Rightarrow \frac{AP}{PM} = ?$

③ $\triangle ACM$:
на т. о бисс.
 $\frac{AP}{PM} = \frac{AC}{CM} = \frac{9}{3} = 3$

① по т. о бисс. $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BM}{2} = \frac{CM}{3} \Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{2}{3}$

② $\triangle ABN$ – равноб. (т.к. AN – высота и бисс.)
 $\Rightarrow AN = 6$
 $CN = 3$

ОТВЕТ: 3 : 1

17 Задача с разветвленным ответом
Найдите все значения a , при которых уравнение
 $(a^2 - 2a)^2 + (a^2 - a + 2)(a^2 - 2a) - a^2(a - 2) = 0$
имеет ровно два решения.

Источники:
ЕГЭ (повыш. баллы)
Январь 2016 (16 апр)

Пусть $(a^2 - 2a) = t$
Тогда $t^2 + (a^2 - a + 2)t - a^2(a - 2) = 0$
 $\begin{cases} t_1 + t_2 = -a^2 + a - 2 \\ t_1 \cdot t_2 = -a^2 \cdot (a - 2) \end{cases}$

$\begin{cases} t_1 = -a^2 \\ t_2 = a - 2 \end{cases}$
 $\begin{cases} ax^2 - 2x = -a^2 \\ ax^2 - 2x = a - 2 \end{cases}$
 $\begin{cases} ax^2 - 2x + a^2 = 0 \\ ax^2 - 2x - a + 2 = 0 \end{cases}$

1 случай Если $a = 0$, то $\begin{cases} -2x = 0 \\ -2x = -2 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$
 \Rightarrow при $a = 0$ будет 2 разл. реш.

2 случай Если $a^2 = -a + 2$, то $\begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$
Если $a = -2$, то $\begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$
при $a = -2$ будет 2 разл. реш.

Если $a = 1$, то $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ (x - 1)^2 = 0 \end{cases}$
 \Rightarrow при $a = 1$ будет 1 реш.

3 случай $\begin{cases} 4 - 4a^2 > 0 \\ 4 - 4a \cdot (-a + 2) < 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} 4 > 4a^2 \\ 4a^2 - 8a + 4 < 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} a^2 < 1 \\ a^2 - 2a + 1 < 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} a < 1 \\ (a - 1)^2 < 0 \end{cases}$ Нет реш.

4 случай $\begin{cases} 4 - 4a^2 < 0 \\ 4a^2 - 8a + 4 > 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} a > 1 \\ (a - 1)^2 > 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} a > 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$

5 случай При $a > 1$ будет 2 разл. реш.
 $\begin{cases} 4 - 4a^2 = 0 \\ 4a^2 - 8a + 4 = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} a = 1 \\ (a - 1)^2 = 0 \end{cases}$
 $a = 1 \in \emptyset$ будет 1 реш.

ОТВЕТ: $\{-2\} \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

18 На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A , среднее арифметическое чисел во второй группе равно B . (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

Источники:
Основная волна (Резерв) 2016

- а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.
 б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.
 в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

а) Узнаем среднее арифметическое всех чисел = 4
 Число, больше 4 < $\frac{A+B}{2}$ | 2
 $A+B > 8$

10 пятёрок
 $A=5$

10 четвёрок и 10 троек
 $B=3,5$

б) Пусть S_1 - сумма 15-ти чисел в первой группе
 S_2 - сумма 15-ти чисел во второй группе
 $A = \frac{S_1}{15}$ $B = \frac{S_2}{15}$

Ср. арифм. всех чисел = $\frac{S_1 + S_2}{30} = \frac{15A + 15B}{30} = \frac{A+B}{2}$

в) $A_{\max} = 5$ можно получить из одной или нескольких пятёрок
 Пусть $A=5$ $B = \frac{9 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 3}{29} = \frac{115}{29}$

$\frac{A+B}{2} \text{ макс} = \frac{5 + \frac{115}{29}}{2} = \frac{260 + 115}{58} = \frac{375}{58} = 6 \frac{17}{58}$

ОТВЕТ:
 а) Приведите
 б) ■
 в) $4 \frac{17}{29}$

– пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Росособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в;	1