Вариант № 41054180

1. Задание 1 № 77368

Решите уравнение $(2x+7)^2=(2x-1)^2$.

Решение.

Выполним преобразования, используя формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$:

$$(2x+7)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2+28x+49=4x^2-4x+1 \Leftrightarrow 32x=-48 \Leftrightarrow x=-1,5.$$

Ответ: −1,5.
Ответ: -1,5

2. Задание 2 № 320189

В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

Решение.

Из 5000 тысяч новорожденных 5000 − 2512 = 2488 девочек. Поэтому частота рождения девочек равна

$$\frac{2488}{5000}=0,4976\approx 0,498.$$

Ответ: 0,498.

Примечание.

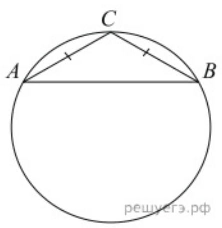
Составителям следовало подчеркнуть, что ими поставлен вопрос об *относительной* частоте (судя по ответу к этому заданию в демонстрационной версии ЕГЭ−2014, дело обстоит именно так). Читателям же следует принять во внимание, что термины *относительная частота* и *частота* обычно являются синонимами.

Однако в § 26 «Относительная частота и закон больших чисел» самого массового российского учебника алгебры Ш.А.Алимова «Алгебра9» (17изд. и позже), наоборот, сказано следующее: «Относительной частотой события A в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N. При этом число M называют частотой события A. Относительную частоту события A обозначают $W(A)=\frac{M}{N}$». Согласно этом учебнику, ответ на задачу — 2488. Мы уже сообщили об этом составителям ЕГЭ.

Ответ: 0,498

3. Задание 3 № 27900

Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.



Решение.

Сумма двух равных углов при основании треугольника равна 60°, поэтому каждый из них равен 30°. Тогда по теореме синусов

$$d=\frac{BC}{\sin A}=\frac{1}{\sin 30^\circ}=2.$$

Ответ: 2.
Ответ: 2

4. Задание 4 № 26854

Найдите значение выражения $\dfrac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$.

Решение.

Выполним преобразования:

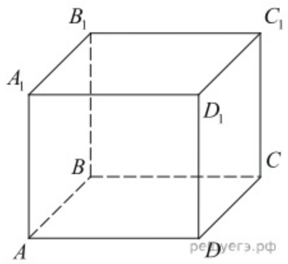
$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}=9^{\log_5 50-\log_5 2}=9^{\log_5 \frac{50}{2}}=9^2=81.$$

Ответ: 81.

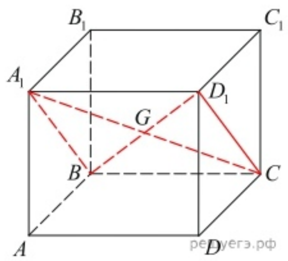
Ответ: 81

5. Задание 5 № 318475

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AC_1=2BC$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и CA_1. Ответ дайте в градусах.



Решение.



Правильная четырёхугольная призма является прямоугольным параллелепипедом, диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, диагональное сечение является прямоугольником. Углом между пересекающимися неперпендикулярными прямыми называется меньший из образованных ими углов, поэтому необходимо найти острый угол между диагоналями этого прямоугольника.

Рассмотрим прямоугольный треугольник A_1BC: в нем катет BC вдвое меньше гипотенузы A_1C, поэтому угол A_1CB равен 60°. Аналогично в треугольнике D_1CB угол D_1BC равен 60°.

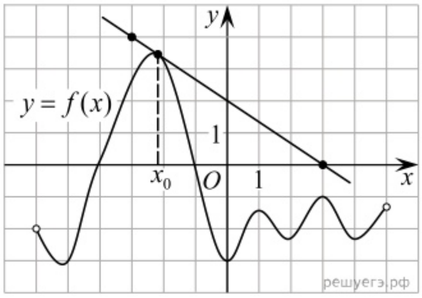
Сумма углов треугольника BGC равна 180° получаем, поскольку два его угла равны 60°, третий угол тоже равен 60°.

Ответ: 60.

Ответ: 60

6. Задание 6 № 525688

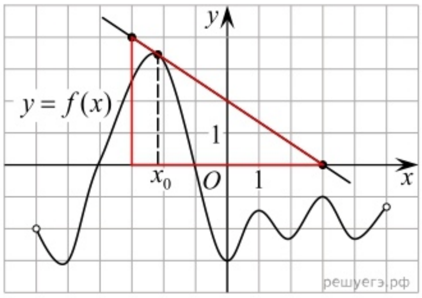
На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Найдите значение производной функции $g(x)=6f(x)-3x$ в точке x_0.



Решение.

Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x)=6\cdot f'(x)-3.$$



По рисунку найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Поэтому $f'(x_0)=-\frac{2}{3}$.

Тогда для искомого значения получаем

$$g'(x_0)=6\cdot f'(x_0)-3=6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-3=-7.$$

Ответ: −7.
Ответ: -7

7. Задание 7 № 27983

При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l=l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$, где $l_0=5$ м – длина покоящейся ракеты, $c=3\cdot10^5$ км/с – скорость света, а υ – скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 4м? Ответ выразите в км/с.

Решение.

Найдем, при какой скорости длина ракеты станет равна 4 м. Задача сводится к решению уравнения $l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=4$ при заданном значении длины покоящейся ракеты $l_0=5$ м и известной величине скорости света $c=3\cdot10^5$ км/с:

$$5\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{9\cdot10^{10}}}=4\Leftrightarrow 1-\frac{\upsilon^2}{9\cdot10^{10}}=\frac{16}{25}\Leftrightarrow\frac{\upsilon^2}{9\cdot10^{10}}=\frac{9}{25}\Leftrightarrow\upsilon^2=\frac{81}{25}\cdot10^{10}\Leftrightarrow\upsilon=180000\ \text{км/с}.$$

Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 4 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180 000 км/с.

Ответ: 180000.
Ответ: 180000

8. Задание 8 № 99590

Расстояние между городами A и B равно 435 км. Из города A в город B со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

Решение.

Пусть автомобили встретятся на расстоянии S км от города A, тогда второй автомобиль пройдет расстояние $435-S$ км. Второй автомобиль находился в пути на 1 час меньше первого, отсюда имеем:

$$\frac{S}{60}=\frac{435-S}{65}+1\Leftrightarrow\frac{S}{60}=\frac{435-S+65}{65}\Leftrightarrow$$

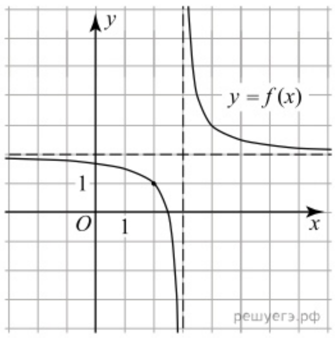
$$\Leftrightarrow 65S=60\cdot 500-60S\Leftrightarrow 125S=30000\Leftrightarrow S=240.$$

Ответ: 240.

Ответ: 240

9. Задание 9 № 564969

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$, где числа a, b и c — целые. Найдите b.



Решение.

Преобразуем данную функцию:

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{ax+ac+b-ac}{x+c}=\frac{ax+ac}{x+c}+\frac{b-ac}{x+c}=a+\frac{b-ac}{x+c}.$$

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=2$, значит, $a=2$.
График функции имеет вертикальную асимптоту $x=3$, значит, $c=-3$.
По графику $f(2)=1$, тогда

$$\frac{b-2\cdot(-3)}{2-3}+2=1\Leftrightarrow b=-5.$$

Ответ: −5.

Ответ: -5

10. **Задание 10 №** 500998

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Решение.

Чтобы пятирублевые монеты оказались в разных карманах, Петя должен взять из кармана одну пятирублевую и две десятирублевые монеты. Это можно сделать тремя способами: 5, 10, 10; 10, 5, 10 или 10, 10, 5. Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}.$$

Другое рассуждение.

Вероятность того, что Петя взял пятирублевую монету, затем десятирублевую, и затем еще одну десятирублевую (в указанном порядке) равна

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{5}.$$

Поскольку Петя мог достать пятирублевую монету не только первой, но и второй или третьей, вероятность достать набор из одной пятирублевой и двух десятирублевых монет в 3 раза больше. Тем самым, она равна 0,6.

Ответ: 0,6.

Приведем другое решение.

Количество способов взять 3 монеты из 6, чтобы переложить их в другой карман, равно C_6^3. Количество способов выбрать 1 пятирублевую монету из 2 пятирублевых монет и взять вместе с ней еще 2 десятирублевых монеты из имеющихся 4 десятирублевых монет по правилу произведения равно $C_2^1\cdot C_4^2$. Поэтому искомая вероятность того, что пятирублевые монеты лежат в разных карманах, равна

$$\frac{C_2^1\cdot C_4^2}{C_6^3}=\frac{2\cdot 6}{20}=0,6.$$

Ответ: 0,6

11. **Задание 11 №** 245174

Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2-6x+11}$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min}=-\dfrac{b}{2a}$, в нашем случае— вточке3. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума подкоренное выражение.

Ответ: 3.
Ответ: 3

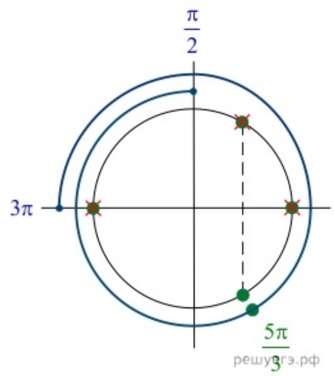
12. **Задание** 12 № 507665

а) Решите уравнение $(\sin 2x - \sin x)(\sqrt{2} + \sqrt{-2\operatorname{ctg} x}) = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Левая часть уравнения имеет смысл при $\operatorname{ctg} x \le 0.$ Выражение $\sqrt{2} + \sqrt{-2\operatorname{ctg} x}$ положительно при всех допустимых x. Значит,



$$\begin{cases} \sin 2x - \sin x = 0, \\ \operatorname{ctg} x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x(2\cos x - 1) = 0, \\ \dfrac{\cos x}{\sin x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \dfrac{\cos x}{\sin x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\cos x}{\sin x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, лежащие на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$. Получим число $\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k:\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{3}$.

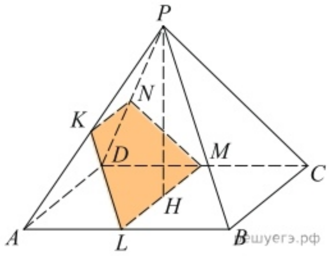
13. Задание 13 № [508233]

В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC.

б) Найдите площадь сечения.

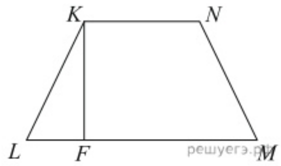
Решение.



а) В плоскости ABP через точку K проведем прямую, параллельную прямой PB до пересечения ее с прямой AB в точке L — середине AB. В основании $ABCD$ через точку L проведем прямую, параллельную прямой BC до пересечения ее с ребром CD в точке M — его середине. По признаку параллельности прямой и плоскости плоскость KLM параллельна прямым PB и BC. Прямая LM параллельна прямой AD, следовательно, она параллельна плоскости APD, а, значит плоскость KLM пересекает плоскость APD по прямой, параллельной LM и пересекает ребро PD в его середине N.

Таким образом, искомое сечение — трапеция $KLMN$.

б) Отрезки KL и MN равны, как средние линии равных правильных треугольников ABP и DCP, а отрезок LM — средняя линия квадрата $ABCD$, следовательно, построенное сечение — равнобедренная трапеция, в которой $LM=4$, $KL=KN=MN=2$.



Проведем высоту KF этой трапеции. Тогда $LF=\dfrac{LM-KN}{2}=1,$ и из прямоугольного треугольника KLF находим $KF=\sqrt{KL^2-LF^2}=\sqrt{3}.$

Окончательно получаем $S_{KLMN}=\dfrac{LM+KN}{2}\cdot KF=3\sqrt{3}.$

Ответ: $3\sqrt{3}$.

14. Задание 14 № [507667]

Решите неравенство

$$\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2\le\frac{|x^2-10x|}{(x^2+7x+6)^2}.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2\le\frac{|x^2-10x|}{(x^2+7x+6)^2}\Leftrightarrow\frac{|x^2-10x|-25}{(x^2+7x+6)^2}\ge0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne-6,\\x\ne-1,\\|x^2-10x|\ge25.\end{cases}$$

Решим неравенство $|x^2-10x|\ge25$:

$$\left[\begin{array}{l}x^2-10x-25\ge0,\\x^2-10x+25\le0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge5+5\sqrt{2},\\x\le5-5\sqrt{2},\\x=5.\end{array}\right.$$

Исключая из полученного набора точки -6 и -1 получаем множество решений исходного неравенства: $(-\infty;-6)\cup(-6;5-5\sqrt{2}]\cup\{5\}\cup[5+5\sqrt{2};+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-6)\cup(-6;5-5\sqrt{2}]\cup\{5\}\cup[5+5\sqrt{2};+\infty)$.

15. Задание 15 № [506956]

Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 р. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 р. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй 80% своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

Решение.

Первый способ (близкий к арифметическому решению).

Пусть первый брокер купил x акций, а второй — y акций. Тогда первый продал $0,75x$ акций, второй — $0,8y$ акций.

То, что сумма от продажи акций, полученных вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером, означает: сумма, полученная вторым брокером, больше суммы, полученной первым, в 2,4 раза:

$$\frac{100+140}{100}=2,4.$$

Так как цена одной акции у обоих брокеров одинакова, а полученные суммы прямо пропорциональны количеству акций, проданных каждым брокером, то

$$\frac{0,8y}{0,75x}=2,4\Leftrightarrow\frac{y}{x}=\frac{2,4\cdot 0,75}{0,8}=\frac{1,8}{0,8}=\frac{9}{4}.$$

Если k — коэффициент пропорциональности количества акций, купленных брокерами, то ими приобретено $13k$ акций на сумму 3640 р. Следовательно, на тот момент цена каждой акции составляла:

$$\frac{3640}{13k}=\frac{280}{k}\text{ р.}$$

Первый брокер продал $0,75\cdot 4k=3k$ акций, второй $0,8\cdot 9k=7,2k$ акций. Всего было продано $10,2k$ акций. К моменту продажи цена одной акции стала

$$\frac{3927}{3k+7,2k}=\frac{3927}{10,2k}=\frac{385}{k}\text{(р), т.е. на }\frac{385-280}{k}=\frac{105}{k}\text{ (р) выше.}$$

Значит, цена одной акции возросла на 37,5%

$$\left(\frac{105}{k}:\frac{280}{k}\cdot 100=37,5\right).$$

Второй способ (преобладает алгебраический подход).

Пусть x р. — первоначальная цена одной акции, y — количество акций, купленных первым брокером, z — количество акций, купленных вторым брокером. И пусть цена одной акции возросла на t %. Тогда: $x\cdot(y+z)=3640$ (1)

Со временем цена одной акции выросла до $x\cdot(1+0,01t)$ рублей.

Первый брокер продал акций на сумму $0,75xy(1+0,01t)$ рублей, а второй брокер — на $0,8xz(1+0,01t)$ рублей.

Согласно условию задачи имеем: $0,75xy(1+0,01t)+0,8xz(1+0,01t)=3927$, т.е.

$$x(0,75y+0,8z)\cdot(1+0,01t)=3927\quad(2)$$

Так как сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером, то

$$0,8xz(1+0,01t)=2,4\cdot 0,75xy(1+0,01t)\Leftrightarrow 0,8z=1,8y\Leftrightarrow z=2,25y.$$

Подставив полученное значение z в уравнение (1), будем иметь:

$$3,25xy = 3640 \Leftrightarrow xy = 1120.$$

Подставим то же значение z в уравнение (2):

$$2,55xy(1+0,01t) = 3927 \Leftrightarrow xy\cdot(1+0,01t) = 1540.$$

А значение xy нами найдено выше.
Следовательно,

$$1120\cdot(1+0,01t) = 1540 \Leftrightarrow 1+0,01t = 1,375 \Leftrightarrow 0,01t = 0,375 \Leftrightarrow t = 37,5.$$

Ответ: 37,5.

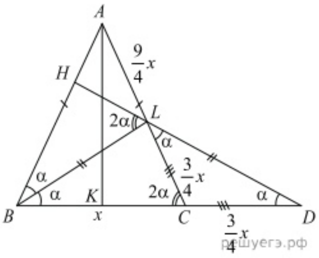
16. Задание 16 № 514717

На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{1}{6}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

Решение.



а) Пусть углы при основании BC равнобедренного треугольника ABC равны 2α, тогда углы при основании BD равнобедренного треугольника LBD равны α. Но угол LCB является внешним углом треугольника LCD, он равен сумме углов CDL и CLD. Поэтому угол CLD также равен α, и, следовательно, треугольник LCD равнобедренный.

б) Пусть $BC = x$, а AK — медиана и высота равнобедренного треугольника ABC. Тогда в прямоугольном треугольнике AKB имеем: $BK = \frac{x}{2}$, $\cos ABK = \frac{1}{6}$, откуда $AB = AC = \frac{BK}{\cos ABK} = 3x$.

Биссектриса BL делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{1}$, поскольку $AC = 3x$, получаем: $LC = \frac{1}{4}AC = \frac{3}{4}x$. В пункте а) было доказано, что треугольник LCD равнобедренный, поэтому $CD = LC = \frac{3}{4}x$. Применим теорему Менелая к треугольнику ABC:

$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CL}{LA} = \frac{AH}{HB}\cdot\frac{7x}{3x}\cdot\frac{1}{3} = \frac{AH}{HB}\cdot\frac{7}{9} = 1,$$

откуда $\frac{AH}{HB} = \frac{9}{7}$.

Ответ: 9 : 7 (или 7 : 9).

Приведем решение п. б), предложенное Олегом Цимбалистом.

Пусть $\angle HBL = \angle CBL = \angle CDL = \alpha$. Тогда $\angle BLH = 2\alpha$, как внешний угол треугольника BLD. По теореме синусов для треугольника BHL, имеем

$$\frac{BH}{\sin 2\alpha} = \frac{HL}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \frac{BH}{HL} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Заметим теперь, что $\angle BAC = 180^\circ - 4\alpha$, а $\angle ALH = \alpha$. По теореме синусов для треугольника AHL, имеем

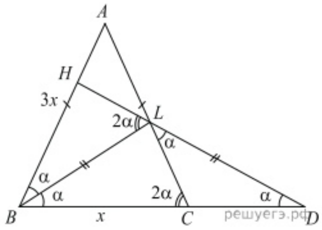
$$\frac{HA}{\sin\alpha} = \frac{HL}{\sin 4\alpha} \Leftrightarrow \frac{HA}{HL} = \frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}.$$

Значит,

$$\frac{BH}{HA}=\frac{\dfrac{BH}{HL}}{\dfrac{HA}{HL}}=\frac{\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}}=\frac{\sin 2\alpha\sin 4\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha}{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\frac{4\cdot\dfrac{35}{36}\cdot\dfrac{1}{6}}{1-\dfrac{1}{6}}=\frac{7}{9}.$$

Приведем ещё одно решение.

а) Обозначим $\angle LBC=\angle LBA=\alpha$, тогда $\angle ACB=\angle ABC=2\alpha$, $\angle LCD=180^\circ-2\alpha$, $\angle LDC=\alpha$, поэтому $\angle DLC=180^\circ-\angle LCD-\angle LDC==\alpha=\angle LDC$, значит, треугольник LCD — равнобедренный.



б) Пусть H — точка пересечения DL с AB. Тогда

$$\angle HLB=180^\circ-\angle BLC-\angle CLD=180^\circ-(180^\circ-\angle LBC-\angle LCB)-\angle CLD=2\alpha,$$

поэтому $\triangle HLB\sim\triangle LCB$ по двум углам. Отсюда $\dfrac{BH}{BL}=\dfrac{BL}{BC}\Leftrightarrow BH=\dfrac{BL^2}{BC}.$

Поскольку $\cos\angle ABC=\dfrac{1}{6}$, то $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{3}$. Пусть $BC=x$, $AB=3x$. По теореме о биссектрисе $\dfrac{AL}{LC}=\dfrac{AB}{BC}$, откуда находим $AL=\dfrac{3}{4}\cdot 3x=\dfrac{9}{4}x$, $CL=\dfrac{3}{4}x$. Тогда

$$BL=LD=\sqrt{CL^2+CD^2-2\cdot CL\cdot CD\cdot\cos(180^\circ-2\alpha)}=\sqrt{\frac{18x^2}{16}+\frac{18x^2}{16}\cdot\frac{1}{6}}=\frac{x}{4}\sqrt{21},$$

значит, $BH=\dfrac{21x^2}{16x}=\dfrac{21x}{16}$, откуда $\dfrac{BH}{HA}=\dfrac{\dfrac{21x}{16}}{3x-\dfrac{21x}{16}}=\dfrac{21}{48-21}=\dfrac{7}{9}.$

Еще несколько подходов изложены при решении задания 513277.

17. Задание 17 № [514741]

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}=a$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Левая часть исходного уравнения неотрицательна при любом допустимом значении x, поэтому при $a<0$ корней нет. Пусть $a\geq 0$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$$x+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2a-x}+2a-x=a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(2a-x)x}=a^2-2a, \\ 0\leq x\leq 2a \end{cases}$$

Левая часть полученного уравнения неотрицательна при любом допустимом значении x, поэтому при $0<a<2$ корней нет. При $a=0$ уравнение $2\sqrt{-x^2}=0$ имеет единственный корень $x=0$. При $a\geq 2$ получаем:

$$\begin{cases} 4(2a-x)x=a^4-4a^3+4a^2, \\ 0\leq x\leq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-8ax+(a^4-4a^3+4a^2)=0, \\ 0\leq x\leq 2a. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения $4x^2-8ax+(a^4-4a^3+4a^2)=0$ равен

$$64a^2-16(a^4-4a^3+4a^2)=64a^3-16a^4,$$

значит, это уравнение имеет два корня при $0<a<4$. Эти корни равны

$$x_1=a\left(1-\frac{\sqrt{4a-a^2}}{2}\right) \quad \text{и} \quad x_2=a\left(1+\frac{\sqrt{4a-a^2}}{2}\right),$$

и всегда принадлежат отрезку $[0;\ 2a]$, поскольку

$$a^2-4a+4\geq 0, \quad \frac{4a-a^2}{4}\leq 1 \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{4a-a^2}}{2}\leq 1.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при $2\leq a<4$.

Ответ: $2\leq a<4$.

18. Задание 18 № [526295]

В ящике лежат 73 овоща, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей , масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 988 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1030 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?

б) Могло ли в ящике оказаться ровно 11 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?

в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

Решение.

Пусть всего a овощей тяжелее 1000 г (а их суммарная масса S_1), b овощей весят 1000 г (их суммарная масса S_2) , c овощей легче 1000 г (их суммарная масса S_3). Тогда условие записывается системой:

$$\begin{cases} a+b+c=73, \\ S_1+S_2+S_3=73000, \\ S_1=1030a, \\ S_2=1000b, \\ S_3=988c. \end{cases}$$

а) В этом случае $a=c$ и $b=73-2a$. Из системы имеем: $1030a+1000\cdot(73-2a)+988a=73000$, откуда $a=0$. Противоречие с условием, так как овощи тяжелее килограмма есть, поскольку их средняя масса 1030 г.

б) В этом случае $b=11$. Тогда из системы имеем: $11+a+c=73$ и $1030a+11000+988c=73000$, откуда $21a=372$. Но тогда a — нецелое число. Противоречие.

в) Пусть x — масса самого легкого овоща. Тогда средняя масса овощей, которые легче 1000 г, не превосходит

$$\frac{x+999\cdot(c-1)}{c}=999-\frac{999-x}{c}.$$

Это выражение должно быть не меньше 988. Решая неравенство $999-\frac{999-x}{c}\geq 988$, получаем $x\geq 999-11c$. Следовательно, чтобы найти минимальное возможное x, надо найти максимально возможное c.

Из уравнения $1030a+1000b+988c=73000$ следует, что c кратно 5. Кроме того, c меньше 73. Максимальное c, при котором уравнение имеет натуральные решения (b может равняться и 0), это $c=50$ $(a=20, b=3)$. Необходимо убедиться, что c не может равняться 70, 65, 60 и 55. Подставляя эти значения c в уравнение, мы получим, что $103a+100b$ может равняться 384, 878, 1372, 1866. Покажем, что эти уравнения не имеют решений в целых неотрицательных числах. Действительно, пусть, например, $103a+100b=384$. Это означает, что $3a-84=100\cdot(3-a-b)$. То есть $3a-84$ кратно 100. Аналогично, $3a-78, 3a-72, 3a-66$ кратны 100. Это означает, что a в этих случаях как минимум 22, но тогда b, очевидно, отрицательно.

Тогда минимальное возможное x получается из уравнения $x=999-11c$, откуда $x=449$ (иначе будет противоречие с необходимым неравенством, полученным выше). Пример следует из решения: один овощ массой 449 г, сорок девять овощей массой 999 г, три овоща массой 1000 г и двадцать овощей массой 1030 г.

Ответ: а) Нет; б) Нет; в) 449.

Приведем решение, предложенное Никитой Фединым.

Пусть всего a овощей тяжелее 1000 г, b овощей весят по 1000 г, c овощей легче 1000 г. Тогда

$$1030a+1000b+988c=1000(a+b+c),$$

откуда $a=0,4c$.

а) Если в ящике равное количество овощей массой меньше 1000 г и массой больше 1000 г, то $a=c$. С учетом равенства $a=0,4c$, это может быть только при $a=c=0$, что противоречит условию задачи. Поэтому ответ — нет.

б) Допустим, в ящике ровно 11 овощей массой 1000 г, тогда $a+c=73-11=62$. Подставив $a=0,4c$, получим $1,4c=62$. Данное уравнение не имеет решений в натуральных числах, поэтому в ящике не может быть ровно 11 овощей весом 1000 г.

в) Пусть x — масса самого легкого овоща. Тогда средняя масса овощей, которые легче 1000 г, не превосходит

$$\frac{x+999\cdot(c-1)}{c}=999-\frac{999-x}{c}.$$

Это выражение должно быть не меньше 988. Решая неравенство $999-\frac{999-x}{c}\geq 988$, получаем, что $x\geq 999-11c$. Следовательно, чтобы найти минимальное возможное x, надо найти максимально возможное c. По условию задачи $a+b+c=73$, тогда $a+c\leq 73$, следовательно, $1,4c\leq 73 \Leftrightarrow c\leq 52$. Значение c должно быть кратным 5, чтобы значение $a=0,4c$ было целым. Поэтому $c=50$.

Минимальное возможное x получим из уравнения $x=999-11c$, откуда $x=449$. Пример следует из решения: один овощ массой 449 г, сорок девять овощей массой 999 г, три овоща массой 1000 г и двадцать овощей массой 1030 г.