Вариант № 41054179

1. Задание 1 № 77371

Найдите корень уравнения $\frac{1}{3}x^2 = 16\frac{1}{3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение.

Переведем число в правой части уравнения в неправильную дробь и умножим обе части уравнения на 3, получаем:

$$\frac{1}{3}x^2 = 16\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 = \frac{49}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7; \\ x = -7. \end{array}\right.$$

Ответ: −7.

Ответ: -7

2. Задание 2 № 320191

На олимпиаде по русскому языку 250 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Решение.

Всего в запасную аудиторию направили 250−120 −120=10 человек. Поэтому вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории, равна 10 : 250 = 0,04.

Ответ: 0,04.

Ответ: 0,04

3. Задание 3 № 525719

Угол между двумя соседними сторонами правильного многоугольника, равен 160° . Найдите число вершин многоугольника.

Решение.

Пусть n — число сторон правильного многоугольника. Сумма углов в правильном многоугольнике вычисляется по формуле 180°(n−2), откуда получаем, что угол между сторонами правильного многоугольника можно вычислить по формуле $180^\circ\left(1-\frac{2}{n}\right)$. Решим уравнение

$$180^\circ\left(1-\frac{2}{n}\right) = 160^\circ \Leftrightarrow -\frac{2}{n} = \frac{160^\circ}{180^\circ} - 1 \Leftrightarrow \frac{2}{n} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow n = 18.$$

Ответ: 18.

Ответ: 18

4. Задание 4 № 502014

Найдите значение выражения $\frac{19}{\cos^2 37^\circ + 1 + \cos^2 53^\circ}$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{19}{\cos^2 37^\circ + 1 + \cos^2 53^\circ} = \frac{19}{\cos^2 37^\circ + 1 + \cos^2 (90-37)^\circ} = \frac{19}{\cos^2 37^\circ + 1 + \sin^2 37^\circ} = \frac{19}{2} = 9,5.$$

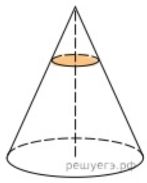
Ответ: 9,5.

Ответ: 9,5

©Тренировочные варианты на сайте 100balnik.ru

5. Задание 5 № 324454

Площадь основания конуса равна 18. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.



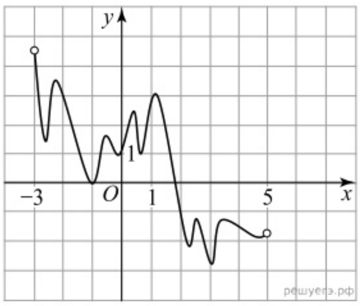
Решение.

Сечение плоскостью, параллельной основанию, представляет собой круг, радиус которого относится к радиусу основания конуса как 3:9. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому площадь сечения в 9 раз меньше площади основания. Тем самым, она равна 2.

Ответ: 2.
Ответ: 2

6. Задание 6 № 323077

На рисунке изображён график функции $y=F(x)$— одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;\ 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-2;\ 4]$.

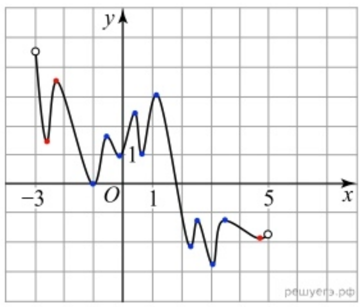


Решение.

По определению первообразной на интервале $(-3;\ 5)$ справедливо равенство

$$f(x) = F'(x).$$

Следовательно, решениями уравнения $f(x)=0$ являются точки экстремумов изображенной на рисунке функции $F(x)$ На рисунке точки, в которых $f(x)=0$ выделены красным и синим цветом. Из них на отрезке $[-2;4]$ лежат 10 точек (синие точки). Таким образом, на отрезке $[-2;4]$ уравнение $f(x)=0$ имеет 10 решений.



Ответ: 10.
Ответ: 10

7. Задание 7 № 27956

Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия – монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q=100-10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p)=q\cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $r(p)\geq 240$:

$$r(p)=q\cdot p=(100-10p)p=100p-10p^2,$$

$$r(p)\geq 240 \Leftrightarrow 10p^2-100p+240\leq 0 \Leftrightarrow p^2-10p+24\leq 0 \Leftrightarrow 4\leq p\leq 6.$$

Ответ: 6.
Ответ: 6

8. Задание 8 № 323849

Два человека отправляются из одного дома на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,4 км от дома. Один идёт со скоростью 2,5 км/ч, а другой — со скоростью 3 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от дома произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

Решение.

Пусть x км — искомое расстояние, его проходит путник, движущийся медленнее, за $\frac{x}{2,5}$ часов. Другой путник вначале проходит 4,4 км до опушки, а затем возвращается на $4,4-x$ км назад, то есть всего он проходит $8,8-x$ км за $\frac{8,8-x}{3}$ часа. Времена движения путников равны, тогда:

$$\frac{x}{2,5}=\frac{4,4}{3}+\frac{4,4-x}{3}\Leftrightarrow\frac{2x}{5}=\frac{8,8-x}{3}\Leftrightarrow 6x=44-5x\Leftrightarrow 11x=44\Leftrightarrow x=4.$$

Тем самым, искомое расстояние равно 4 км.

Ответ: 4.

Приведем другое решение.

Пусть x км — расстояние, которое не дошел до опушки первый путник, оно равно расстоянию, которое прошел от опушки до места встречи второй путник. Путники затратили одно и то же время, поэтому

$$\frac{4,4+x}{3}=\frac{4,4-x}{2,5}\Leftrightarrow 2,5(4,4+x)=3(4,4-x)\Leftrightarrow 5,5x=0,5\cdot 4,4\Leftrightarrow x=0,4.$$

Не дойдя 0,4 км до опушки, первый путник оказался на расстоянии 4,4−0,4=4 км от дома. Это и есть искомое расстояние.

Приведем другое решение.

Пусть x ч — время, прошедшее от начала движения до момента встречи пешеходов. Тогда к моменту их встречи тот, кто шёл медленнее, прошёл $2,5x$ км, а тот, кто шёл быстрее, прошёл $3x$ км, из которых 4,4км до опушки, а $3x-4,4$ в обратном направлении. Пешеходы встретились на одном и том же расстоянии от опушки, поэтому расстояние, которое ещё осталось пройти до опушки более медленному из них, равно расстоянию, на которое более быстрый от неё уже удалился. Следовательно, $4,4-2,5x=3x-4,4$, откуда $x=1,6$ ч, а искомое расстояние равно $2,5\cdot 1,6=4$ км.

Комментарий. Уравнение можно было бы составить несколько по-другому. По каждому участку либо прошли оба пешехода, либо один пешеход дважды, поэтому общий пройденный путь равен удвоенному расстоянию от дома до опушки: $3x+2,5x=8,8$.

Приведем другое решение.

Тот, кто идет быстрее, дойдет до опушки за 4,4:3=22/15 часа. За это время тот, кто идет медленнее, пройдет 2,5·22/15=11/3 км и окажется на расстоянии 4,4−11/3=11/15 км от опушки. Далее они пойдут на встречу друг другу со скоростью сближения 5,5 км/час и преодолеют разделяющее их расстояние за (11/15):5,5=2/15 часа. За это время медленно идущий пешеход пройдет еще 2,5·2/15=1/3 км и окажется на расстоянии 11/3 + 1/3=4 км от точки отправления.

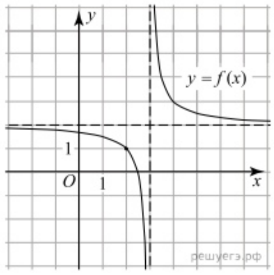
Приведем ещё одно решение.

Условие задачи равносильно тому, что два человека, каждый из которых находится на расстоянии 4,4 км от опушки, идут навстречу друг другу. Скорость их сближения равна 5,5 км/час. Встреча произойдёт через $8,8:5,5=1,6$ часа на расстоянии $2,5\cdot 1,6=4$ км от дома.

Ответ: 4

9. Задание 9 № 564961

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$, где числа a, b и c — целые. Найдите c.



Решение.
Преобразуем данную функцию:

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{ax+ac+b-ac}{x+c}=\frac{ax+ac}{x+c}+\frac{b-ac}{x+c}=a+\frac{b-ac}{x+c}.$$

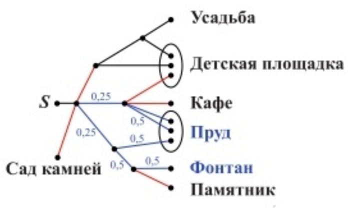
График функции имеет вертикальную асимптоту $x=3$, значит, $c=-3$.

Ответ: −3.
Ответ: -3

10. Задание 10 № 562239

Артём гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.

Решение.
Чтобы выйти к фонтану Артёму нужно пройти три развилки. На первой развилке нужно выбрать одну из четырёх дорожек, на второй — одну из двух, на третьей — одну из двух. Значит, вероятность выйти к фонтану равна $0,25\cdot 0,5\cdot 0,5=0,0625$.



Выйти к пруду Артём может двумя разными способами. Первый способ: на первой развилке нужно выбрать одну из четырёх дорожек, на второй — одну из двух. Вероятность этого способа равна $0,25\cdot 0,5=0,125$. Второй способ: на первой развилке нужно выбрать одну из четырёх дорожек, на второй — две из четырёх. Вероятность этого способа тоже равна $0,25\cdot 0,5=0,125$.

Значит, вероятность того, что Артём выйдет к пруду или фонтану, равна $0,0625+0,125+0,125=0,3125$.

Ответ: 0,3125.
Ответ: 0,3125

11. Задание 11 № 26725

Найдите точку максимума функции $y=(x^2-10x+10)e^{5-x}$.

Решение.

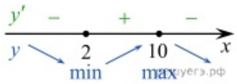
Найдем производную заданной функции:

$$y'=(x^2-10x+10)'e^{5-x}+(x^2-10x+10)(e^{5-x})'=$$
$$=(2x-10)e^{5-x}-(x^2-10x+10)e^{5-x}=-(x^2-12x+20)e^{5-x}=-(x-2)(x-10)e^{5-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x-2)(x-10)e^{5-x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=10. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=10$.

Ответ: 10.
Ответ: 10

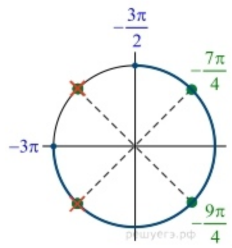
12. Задание 12 № 512335

а) Решите уравнение $(\mathrm{tg}^2 x-1)\sqrt{13\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Заметим, что первый множитель содержит тангенс, поэтому $\cos x\neq 0$. Второй множитель — квадратный корень, поэтому подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Следовательно, область определения уравнения задается неравенством $\cos x>0$. На это области второй множитель не обращается в нуль. Рассмотрим случай, когда нулю равен первый множитель. Последовательно получаем:



$$(\mathrm{tg}^2 x-1)\sqrt{13\cos x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}^2 x=1, \\ \cos x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}\, x=\pm 1, \\ \cos x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ \cos x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Корни из отрезка $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$ отберём с помощью единичной окружности. Получаем $-\dfrac{9\pi}{4}$ и $-\dfrac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{9\pi}{4}; -\dfrac{7\pi}{4}$.

©Тренировочные варианты на сайте 100balnik.ru

13. Задание 13 № 513253

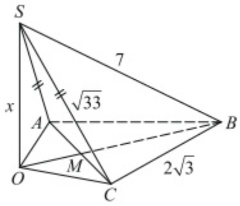
В пирамиде $SABC$ в основании лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, $SA = SC = \sqrt{33}$, $SB = 7$. Точка O — основание высоты пирамиды, проведённой из вершины S.

а) Докажите, что точка O лежит вне треугольника ABC.

б) Найдите объём четырёхугольной пирамиды $SABCO$.

Решение.

а) Поскольку $SA = SC$, точка S лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку AC и проходящей через его середину M. Следовательно, O лежит на прямой BM. Обозначим высоту пирамиды за x, тогда $AO = \sqrt{33 - x^2}$, $BO = \sqrt{49 - x^2}$. Следовательно, $x^2 \le 33$ и $BO \ge \sqrt{49 - 33} = 4$. При этом $BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3$, поэтому точка O лежит вне треугольника. Более того, поскольку $AO < BO$, она лежит на продолжении BM за точку M.



б) Из треугольника SMA найдем $SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{30}$. Теперь, из треугольника SMO находим $MO = \sqrt{SM^2 - SO^2} = \sqrt{30 - x^2}$. Тогда из треугольника BOS имеем

$$\left(3 + \sqrt{30 - x^2}\right)^2 + x^2 = 49 \Leftrightarrow 6\sqrt{30 - x^2} = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30 - x^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{245}{9} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}\sqrt{5}.$$

Тогда $MO = \dfrac{5}{3}$, $BO = \dfrac{14}{3}$ и

$$V_{ABCOS} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCO} = \frac{7}{9}\sqrt{5} \cdot AC \cdot BO \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{18}\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{14}{3} = \frac{98\sqrt{15}}{27}.$$

Приведем вариант решения п. а) предложенный Елизаветой Римшей.

В треугольнике ABC высота $BM = 3$. По теореме Пифагора $SM^2 = SC^2 - MC^2 = 30$. Напишем теорему косинусов для треугольника BMS:

$$SB^2 = BM^2 + SM^2 - 2 \cdot BM \cdot SM \cdot \cos\angle BMS \Leftrightarrow 49 = 9 + 30 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{30}\cos\angle BMS \Leftrightarrow \cos\angle BMS = -\frac{\sqrt{30}}{18} < 0.$$

Следовательно, $\angle BMS$ — тупой и высота SO лежит вне треугольника.

Ответ: $\dfrac{98\sqrt{15}}{27}$.

14. Задание 14 № 508255

Решите неравенство $\log_2^2(3x-1) + \log_{3x-1}^2 2 - \log_2(3x-1)^2 - \log_{3x-1} 4 + 2 \le 0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\log_2^2(3x-1) + \frac{1}{\log_2^2(3x-1)}\right) - 2\left(\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)}\right) + 2 \le 0.$$

Пусть $\log_2(3x-1) + \dfrac{1}{\log_2(3x-1)} = t$, тогда $\log_2^2(3x-1) + \dfrac{1}{\log_2^2(3x-1)} + 2 = t^2$ и, следовательно,

$$\log_2^2(3x-1) + \frac{1}{\log_2^2(3x-1)} = t^2 - 2.$$

Тогда исходное неравенство равносильно: $t^2 - 2t \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 2$, откуда

$$0 \le \log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)} \le 2 \Leftrightarrow \log_2(3x-1) = 1 \Leftrightarrow 3x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

Замечание: Нетрудно заметить, что полученный корень удовлетворяет ОДЗ.

15. Задание 15 № 507714

Гражданин Петров по случаю рождения сына открыл 1 сентября 2008 года в банке счёт, на который он ежегодно кладет 1000 рублей. По условиям вклада банк ежегодно начисляет 20% на сумму, находящуюся на счёте. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и 1 сентября 2014 года он открыл в другом банке счёт, на который ежегодно кладёт по 2200 рублей, а банк начисляет 44% в год. В каком году после очередного пополнения суммы вкладов сравняются, если деньги со счетов не снимают?

Решение.

Через n лет 1 сентября на первом счёте будет сумма (суммируем $n+1$ член геометрической прогрессии)

$$1000+1000\cdot 1,2+\ldots+1000\cdot 1,2^n=1000(1+1,2+\ldots+1,2^n)=1000\cdot\frac{1,2^{n+1}-1}{1,2-1}=5000(1,2^{n+1}-1) \text{ (руб.)}.$$

В это же время на втором счёте будет сумма

$$2200+2200\cdot 1,44+\ldots+2200\cdot 1,44^{n-6}=2200\cdot\frac{1,44^{n-5}-1}{1,44-1}=5000(1,44^{n-5}-1) \text{ (руб.)}.$$

Приравняем эти суммы и решим полученное уравнение:

$$5000(1,2^{n+1}-1)=5000(1,44^{n-5}-1)\Leftrightarrow 1,2^{n+1}=1,44^{n-5}\Leftrightarrow 1,2^{n+1}=1,2^{2(n-5)}\Leftrightarrow n+1=2n-10\Leftrightarrow n=11.$$

Таким образом, суммы на счетах сравняются через 11 лет после открытия первого вклада, то есть в 2019 году.

Ответ: 2019.

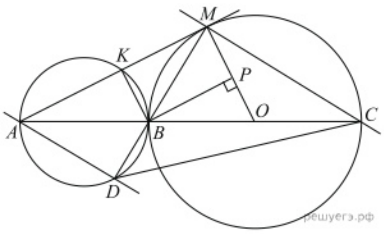
16. Задание 16 № 513103

Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

Решение.



а) Точки M и D лежат на окружностях с диаметрами BC и AB соответственно, поэтому

$$\angle BMC=\angle BDA=90^\circ.$$

Прямые AD и MC перпендикулярны одной и той же прямой MD, следовательно, прямые AD и MC параллельны.

б) Пусть O — центр окружности с диаметром BC. Тогда прямые OM и AM перпендикулярны. Учитывая, что прямые BK и AM перпендикулярны, получаем, что прямые OM и BK параллельны. Обозначим BK через x. Треугольник AMO подобен треугольнику AKB с коэффициентом 5, поэтому $OB = OM = 5x$. Опустим перпендикуляр BP из точки B на прямую OM. Так как четырёхугольник $BKMP$ — прямоугольник,

$$BP=KM=12,$$
$$OP=OM-MP=OM-BK=5x-x=4x.$$

По теореме Пифагора $OB^2 = BP^2 + OP^2$, откуда $25x^2 = 144 + 16x^2$. Получаем, что $x = 4$.

Поскольку прямые AD и MC параллельны,

$$S_{DBC}=S_{MDC}-S_{MBC}=S_{MAC}-S_{MBC}=S_{ABM}.$$

Значит, треугольники DBC и AMB равновелики. Следовательно,

$$S_{DBC}=S_{AMB}=\frac{1}{2}AM\cdot BK=\frac{1}{2}\cdot 15x=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 4=30.$$

Ответ: 30.

17. Задание 17 № 517834

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0.$$

имеет ровно один корень на отрезке [4; 8].

Решение.

Уравнение равносильно следующей системе:

©Тренировочные варианты на сайте 100balnik.ru

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a-7)(x+a-2)=0,\\ 10x-x^2-a^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a+7,\\ x=2-a,\end{array}\right.\\ 10x-x^2-a^2>0\end{cases}$$

Рассмотрим первый случай, когда корни совпадают: $a+7=2-a \Leftrightarrow a=-\frac{5}{2}$. Тогда корень $x=\frac{9}{2}$ принадлежит отрезку [4; 8] и удовлетворяет ОДЗ.

Рассмотрим второй случай, когда первый корень $x=a+7$ принадлежит отрезку [4; 8] и удовлетворяет ОДЗ. Тогда уравнение имеет единственное решение на заданном отрезке, если второй корень не принадлежит отрезку [4; 8] или не удовлетворяет ОДЗ. Имеем:

$$\begin{cases}4\le a+7\le 8,\\ 10(a+7)-(a+7)^2-a^2>0,\\ \left[\begin{array}{l}2-a>8,\\ 2-a<4,\\ 10(2-a)-(2-a)^2-a^2\le 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2a^2-4a+21>0,\\ -3\le a\le 1,\\ \left[\begin{array}{l}a<-6,\\ a>-2,\\ -a^2-3a+8\le 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-2-\sqrt{46}}{2}<a<\frac{-2+\sqrt{46}}{2},\\ -3\le a\le 1,\\ \left[\begin{array}{l}a>-2,\\ a\ge\frac{-3+\sqrt{41}}{2},\\ a\le\frac{-3-\sqrt{41}}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow -2<a\le 1.$$

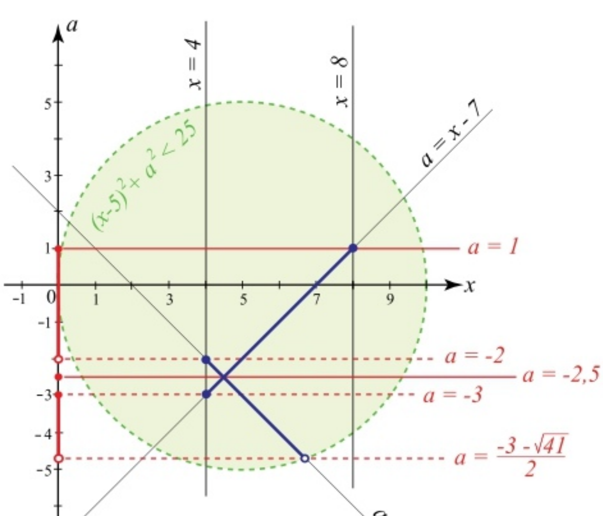
Рассмотрим второй случай, когда второй корень $x=2-a$ принадлежит отрезку [4; 8] и удовлетворяет ОДЗ. Тогда уравнение имеет единственное решение на заданном отрезке, если первый корень не принадлежит отрезку [4; 8] или не удовлетворяет ОДЗ. Имеем:

$$\begin{cases}4\le 2-a\le 8,\\ 10(2-a)-(2-a)^2-a^2>0,\\ \left[\begin{array}{l}7+a>8,\\ 7+a<4,\\ 10(7+a)-(7+a)^2-a^2\le 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a^2-3a+8>0,\\ -6\le a\le -2,\\ \left[\begin{array}{l}a<-3,\\ a>1,\\ -2a^2-4a+21\le 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<\frac{-3+\sqrt{41}}{2},\\ -6\le a\le -2,\\ \left[\begin{array}{l}a<-3,\\ a\ge\frac{-2+\sqrt{46}}{2},\\ a\le\frac{-2-\sqrt{46}}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<-3.$$

Приведем другое решение:

Уравнение равносильно следующей системе:

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a-7)(x+a-2)=0,\\ 10x-x^2-a^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=x-7,\\ a=2-x,\end{array}\right.\\ (x-5)^2+a^2<25.\end{cases}$$



В плоскости xOa графиком системы (а значит и графиком исходного уравнения) будут отрезки прямых $a=2-x$ и $a=x-7$, лежащие внутри круга, ограниченного окружностью $(x-5)^2+a^2=25$.

Решение системы на отрезке [4; 8] на рисунке изображено синим цветом.

Найдём значения параметра a (значения ординаты), при которых уравнение имеет единственное решение на отрезке [4; 8].

Для этого найдём ординату точки пересечения прямых $a=2-x$ и $a=x-7$

$$2-a=a+7 \Leftrightarrow a=-2{,}5.$$

Ординаты точек пересечения прямой $a=2-x$ и окружности $(x-5)^2+a^2=25$, найдём, подставив в уравнение окружности $x=2-a$.

$$(2-a-5)^2+a^2=25 \Leftrightarrow 2a^2+6a-16=0 \Leftrightarrow$$

©Тренировочные варианты на сайте 100balnik.ru

$$\Leftrightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}.$$

Таким образом исходное уравнение имеет на отрезке [4; 8] ровно один корень при $\frac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<-3,\ a=-2{,}5,\ -2<a\le 1.$

Ответ: $\frac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<-3,\ a=-\frac{5}{2},\ -2<a\le 1.$

18. Задание 18 № 517744

С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.

б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трехзначного числа?

Решение.

а) Например, из числа 2847 получается 2108124117.

б) Заметим, что если в изначальном числе была цифра 9 (не в последнем разряде), то в получившемся числе справа от нее должна стоять цифра 1 или 9. Значит, цифра 9 в числе 37494128 могла получиться только в результате сложения соседних цифр. Но сумма 4 + 4 не равна 9, поэтому такое число не могло получиться.

в) Пусть изначальное трехзначное число равно $100a+10b+c$, где a, b и c — цифры. Получившееся число будет семизначным, только если $a+b\ge 10$ и $b+c\ge 10$, а во всех остальных случаях полученное число будет меньше 1 000 000.

Если $a+b\ge 10$ и $b+c\ge 10$, то полученное число будет равно

$$a\cdot 10^6+1\cdot 10^5+(a+b-10)\cdot 10^4+b\cdot 10^3+1\cdot 10^2+(b+c-10)\cdot 10+c.$$

Знакочередующая сумма цифр полученного числа равна

$$a-1+(a+b-10)-b+1-(b+c-10)+c=2a-b.$$

При $a=9$ получившееся число будет больше, чем при любом другом a, вне зависимости от b и c. В этом случае $2a-b$ делится на 11 только при $b=7$ и любом c. При $a=9$ и $b=7$ максимальное число получится для $c=9$.

Таким образом, максимальное число получается из числа 979 и равно 9167169.

Ответ: а) 2847; б) нет; в) 9167169.

©Тренировочные варианты на сайте 100balnik.ru