Вариант № 41054178

1. Задание 1 № 509413

Найдите корень уравнения $7^{18,5x+0,7} = \frac{1}{343}$.

Решение.

Перейдём к одному основанию степени:

$$7^{18,5x+0,7} = \frac{1}{343} \Leftrightarrow 7^{18,5x+0,7} = 7^{-3} \Leftrightarrow 18,5x+0,7 = -3 \Leftrightarrow 18,5x = -3,7 \Leftrightarrow x = -\frac{37}{185} = -0,2.$$

Ответ: −0,2.

Ответ: -0,2

2. Задание 2 № 501210

В соревновании по биатлону участвуют спортсмены из 25стран, одна из которых— Россия. Всего на старт вышло 60участников, из которых 6— из России. Порядок старта определяется жребием, стартуют спортсмены друг за другом. Какова вероятность того, что десятым стартовал спортсмен из России?

Решение.

В соревновании принимает участие 6 спортсменов из России, всего 60 участников. Тогда вероятность того, что спортсмен, выступающий десятым, окажется из России, равна

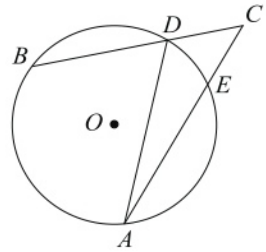
$$\frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Ответ: 0,1.

Ответ: 0,1

3. Задание 3 № 27885

Найдите угол ACB, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118° и 38°. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Угол между двумя секущими равен полуразности высекаемых ими дуг:

$$\angle ACB = \frac{\cup AB - \cup DE}{2} = \frac{118^\circ - 38^\circ}{2} = 40^\circ.$$

Ответ: 40.

Ответ: 40

4. Задание 4 № 26786

Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=0,4.$

Решение.

Пользуемся периодичностью тангенса и используем формулу приведения:

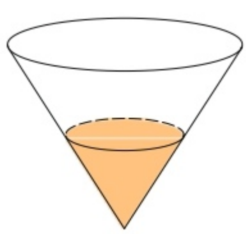
$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\alpha+2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-2,5.$$

Ответ: −2,5.

Ответ: -2,5

5. Задание 5 № 318145

В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 70мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Решение.

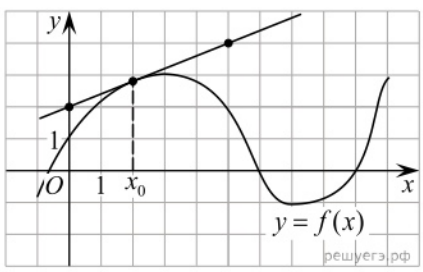
Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем большего конуса в 8 раз больше объема меньшего конуса, он равен 560 мл. Следовательно, необходимо долить 560 − 70 = 490 мл жидкости.

Ответ: 490.

Ответ: 490

6. Задание 6 № 525689

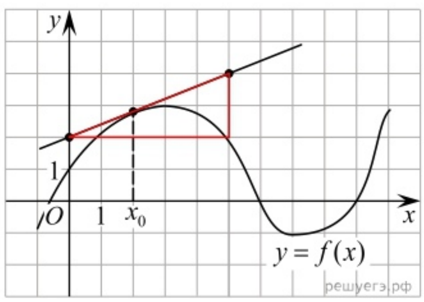
На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0=2$. Найдите значение производной функции $g(x)=x^2-f(x)+1$ в точке x_0.



Решение.

Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x)=2x-f'(x).$$



По рисунку найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Поэтому $f'(x_0)=f'(2)=\frac{2}{5}=0,4.$

Тогда для искомого значения получаем

$$g'(x_0)=g'(2)=2\cdot x_0-f'(x_0)=2\cdot 2-f'(2)=2\cdot 2-0,4=3,6.$$

Ответ: 3,6.

Ответ: 3,6

7. Задание 7 № 27961

Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = 1$ – постоянные параметры, x(м) – смещение камня по горизонтали, y(м) – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $y \geq 9$: при заданных значениях параметров a и b:

$$y \geq 9 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}x^2 + x \geq 9 \Leftrightarrow x^2 - 100x + 900 \leq 0 \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 90\text{м}.$$

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние – 90 метров.

Ответ: 90.

Ответ: 90

8. Задание 8 № 99613

Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Решение.

Рабочий выполняет 1/15 часть заказа в час, поэтому за 3 часа он выполнит 1/5 часть заказа. После этого к нему присоединяется второй рабочий, и, работая вместе, два рабочих должны выполнить 4/5 заказа. Чтобы определить время совместной работы, разделим этот объём работы на совместную производительность:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} = 6 \text{ часов.}$$

Тем самым, на выполнение всего заказа потребуется $6 + 3 = 9$ часов.

Ответ: 9.

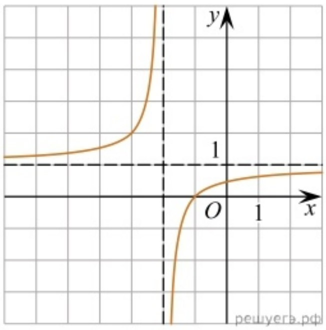
Приведем другое решение.

Один рабочий работал 3 часа и должен был бы еще 12, но к нему присоединился второй рабочий, и они стали работать в два раза быстрее. Поэтому вдвоем они работали только 6 часов. Значит, полное время работы 9 часов.

Ответ: 9

9. Задание 9 № [564650]

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$, где числа a, b и c — целые. Найдите $f(-6)$.



Решение.

Заметим, что асимптоты графика данной гиперболы это прямые $x = -2$ и $y = 1$, откуда $a = 1$, $c = -2$. Учитывая, что $f(-1)=0$, получим уравнение $1+\dfrac{b}{-1+2}=0$, откуда $b = -1$. Вычислим теперь $f(-6)=1-\dfrac{1}{-6+2}=1,25$.

Ответ: 1,25.
Ответ: 1,25

10. Задание 10 № [320203]

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

Решение.

Рассмотрим события A = «в автобусе меньше 15 пассажиров» и B = «в автобусе от 15 до 19 пассажиров». Их сумма— событие A+B=«в автобусе меньше 20 пассажиров». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,94 = 0,56 + P(B), откуда P(B) = 0,94 − 0,56 = 0,38.

Ответ: 0,38.
Ответ: 0,38

11. Задание 11 № [26702]

Найдите наибольшее значение функции $y=3\mathrm{tg}x-3x+5$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4};\ 0\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y'=3\cdot\frac{1}{\cos^2x}-3=3\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)=3\mathrm{tg}^2x.$$

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является

$$y(0)=3\,\mathrm{tg}\,0-3\cdot0+5=5.$$

Ответ: 5.
Ответ: 5

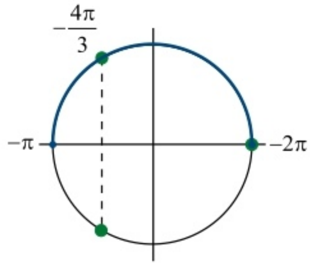
12. Задание 12 № 507595

а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:



$$2\cos^2 x - 1 = \cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$: $-2\pi; -\dfrac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{2\pi k, \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-2\pi, -\dfrac{4\pi}{3}$.

13. Задание 13 № 514480

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

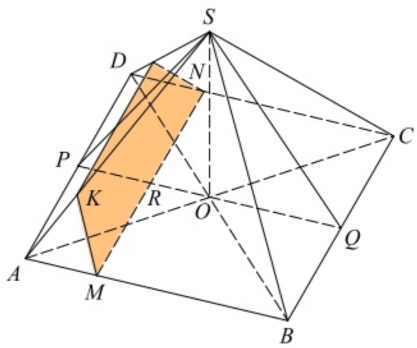
а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

Решение.

а) Пусть O — центр основания пирамиды (рис. 1), тогда

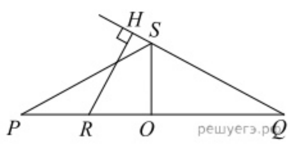
$$AO = 8\sqrt{2},\ AS = \sqrt{AO^2 + OS^2} = 12.$$



Заметим, что $AM : AB = AK : AS$, значит, прямые MK и BS параллельны. Кроме того, прямые MN и BC также параллельны, поэтому плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Пусть точки P, Q и R — середины отрезков AD, BC и MN соответственно. Плоскости MNK и SBC параллельны, а плоскость SPQ перпендикулярна прямой BC, поэтому искомое расстояние равно расстоянию от точки R до прямой QS. Опустим из точки R перпендикуляр RH на прямую SQ (рис. 2). Тогда

$$RH = RQ \cdot \sin\angle PQS = MB \cdot \frac{SO}{SQ} = MB \cdot \frac{SO}{\sqrt{SO^2 + OQ^2}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$



Ответ: б) $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.

14. **Задание** 14 № 507764

Решите неравенство: $\dfrac{\lg(5y^2-2y+1)}{\lg(4y^2-5y+1)^3} \leq \dfrac{\log_{5^3} 7}{\log_5 7}$.

Решение.

Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{\lg(5y^2-2y+1)}{\lg(4y^2-5y+1)^3} \leq \frac{\log_{5^3} 7}{\log_5 7} \Leftrightarrow \frac{\lg(5y^2-2y+1)}{3\lg(4y^2-5y+1)} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_{4y^2-5y+1}(5y^2-2y+1) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{4y^2-5y+1}\left(\frac{5y^2-2y+1}{4y^2-5y+1}\right) \leq 0.$$

Перейдём к системе:

$$\begin{cases} 4y^2-5y+1>0, \\ 4y^2-5y+1 \neq 1, \\ 5y^2-2y+1>0, \\ (4y^2-5y+1-1)\left(\dfrac{5y^2-2y+1}{4y^2-5y+1}-1\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4y-1)(y-1)>0, \\ y(4y-5) \neq 0, \\ (4y-5)(y+3) \leq 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $y<\dfrac{1}{4}$ или $y>1$. Из второго равенства получаем, что $y \neq 0$ и $y \neq \dfrac{5}{4}$. Решение третьего неравенства: $-3 \leq y \leq \dfrac{5}{4}$.

Таким образом, решением неравенства является множество $[-3;\ 0) \cup \left(0;\ \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(1;\ \dfrac{5}{4}\right)$.

Ответ: $[-3;\ 0) \cup \left(0;\ \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(1;\ \dfrac{5}{4}\right)$.

15. Задание 15 **№** 520806

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысяч рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита A тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$A,\ A-30,\ A-60,\ \ldots,\ A-570,\ A-600,\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}03A,\ 1{,}03(A-30),\ \ldots,\ 1{,}03(A-570),\ 1{,}03(A-600).$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0{,}03A+30,\ 0{,}03(A-30)+30,\ \ldots,\ 0{,}03(A-570)+30,\ 1{,}03(A-600).$$

Всего следует выплатить

$$20\cdot 0,03\cdot\frac{2A-570}{2}+20\cdot 30+1,03(A-600)=1,63A-189 \text{ (тыс. рублей).}$$

Откуда $1,63A-189=1604 \Leftrightarrow 1,63A=1793 \Leftrightarrow A=1100.$

Значит, сумма, которую планируется взять в кредит равна 1100 тыс. рублей.

Ответ: 1 100 000 рублей.

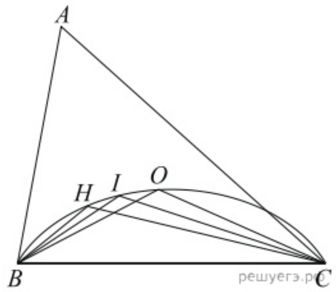
16. Задание 16 № [513608]

Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OIH, если $\angle ABC = 75^\circ$.

Решение.



Точка O — центр описанной окружности около треугольника ABC, поэтому $\angle BOC = 2\angle BAC$. Значит,

$$180^\circ = \angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 2\angle BAC + \angle BAC = 3\angle BAC,$$

откуда $\angle BAC = 60^\circ$; $\angle ABC + \angle ACB = 120^\circ$; $\angle BOC = 120^\circ$.

Найдём угол BIC:

$$\angle BIC = 180^\circ - \angle IBC - \angle ICB =$$

$$= 180^\circ - \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = 180^\circ - \frac{120^\circ}{2} = 120^\circ.$$

Значит, $\angle BOC = \angle BIC$, поэтому точки B, O, I и C лежат на одной окружности.

б) Найдём угол BHC:

$$\angle BHC = 180^\circ - \angle HBC - \angle HCB = 180^\circ - (90^\circ - \angle ACB) - (90^\circ - \angle ABC) = \angle ACB + \angle ABC = 120^\circ.$$

Значит, $\angle BOC = \angle BIC = \angle BHC$, поэтому точки B, O, I, H и C лежат на одной окружности.

Поскольку $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$, получаем $\angle ACB = 45^\circ$. В равнобедренном треугольнике BOC имеем

$$\angle OBC = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = 30^\circ.$$

Прямая BH перпендикулярна AC, поэтому $\angle HBC = 90^\circ - \angle ACB = 45^\circ$.

Значит, $\angle HBO = \angle HBC - \angle OBC = 15^\circ$. Биссектриса угла треугольника лежит внутри угла, образованного медианой и высотой, исходящими из той же вершины, поэтому лучи BH, BI и BO пересекают дугу окружности в указанном на рисунке порядке. Четырёхугольник $BOIH$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle OIH = 180^\circ - \angle HBO = 165^\circ.$$

Ответ: б) 165°.

Примечание.

Полезно сравнить часть а) этой задачи с заданием 25 тренировочной работы МИОО № 1 в формате ГИА-9 от 1 октября 2013 года:

В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°. Докажите, что точки A, C, центр описанной окружности треугольника ABC и точка пересечения высот треугольника ABC лежат на одной окружности.

17. Задание 17 № 501693

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

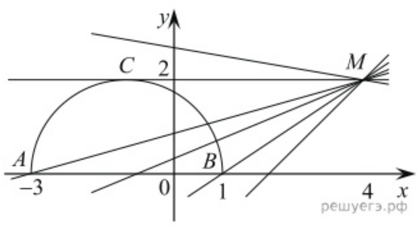
$$ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3-2x-x^2}=-ax+4a+2$ Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ и $g(x)=-ax+4a+2=-a(x-4)+2.$ Графиком функции $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1,0)$, лежащая в верхней полуплоскости. При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(4,2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, проходит через точки $M(4,2)$ и $A(-3,0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{2}{7}$. При $0<-a\leq\frac{2}{7}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент не больше, чем у прямой MA, и пересекает полуокружность в двух точках. При $\frac{2}{7}<-a\leq\frac{2}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{2}{3}\leq a<-\frac{2}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{2}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3},-\frac{2}{7}\right)\cup\{0\}.$

18. Задание 18 № 513611

Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; ...; 199\}$ хорошим?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; ...; 2^{200}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$?

Решение.

а) Разобьём множество {100, 101, 102, ..., 199} на два множества пятидесятиэлементных множества следующим образом:

$$\{100, 199, 102, 197, 104, 195, ..., 148, 151\},$$

$$\{101; 198; 103; 196; 105, 194, ..., 149, 150\}.$$

Сумма чисел в этих двух подмножествах одинакова, поэтому исходное множество является хорошим. (Возможны и другие примеры.)

б) Заметим, сумма чисел в подмножестве, которое будет содержать число 2^{200}, будет больше суммы чисел в другом подмножестве, поскольку 2^{200} больше суммы всех остальных чисел:

$$2+4+...+2^{198}+2^{199}<1+2+4+...+2^{198}+2^{199}=2^{200}-1<2^{200}.$$

Следовательно, множество $\{2; 4; 8; ...; 2^{200}\}$ не является хорошим.

Другое объяснение.

Одно из двух подмножеств, на которое мы хотим разбить исходное множество, будет содержать число 2. Тогда сумма чисел в этом подмножестве будет кратна 2, но не кратна 4, а сумма чисел во втором подмножестве будет кратна 4. Тем самым, суммы чисел в подмножествах не равны, и исходное множество не является хорошим.

Третье объяснение.

Полусумма всех чисел исходного множества нечетна, а все элементы четны, поэтому на два множества с нечетной суммой исходное множество не разбить.

в) Заметим, что четырёхэлементное множество является хорошим в двух случаях: либо одно число является суммой трёх других, либо множество содержит две пары чисел с равными суммами.

Единственное подмножество множества {3; 4; 5; 6; 8; 10; 12}, удовлетворяющее первому случаю, — это {3;4;5;12}. Других вариантов нет, поскольку сумма трёх чисел, отличных от 3, 4 и 5, будет больше 12.

Рассмотрим второй случай и заметим, что если множество содержит две пары чисел с равными суммами, то сумма всех чисел чётна. Следовательно, нечетные числа 3 и 5 либо одновременно входят в хорошее четырёхэлементное подмножество, либо одновременно не входят в него.

Если 3 и 5 входят в подмножество, то либо сумма двух других чисел равна 8 (что невозможно), либо разность двух других чисел равна 2. Получаем хорошие подмножества:

$$\{3; 4; 5; 6\}; \{3; 5; 6; 8\}; \{3; 5; 8; 10\}; \{3; 5; 10; 12\}.$$

Если 3 и 5 не входят в подмножество, то хорошее подмножество лежит во множестве {4; 6; 8; 10; 12}. Получаем хорошие подмножества:

$$\{4; 6; 8; 10\}; \{4; 6; 10; 12\}; \{6; 8; 10; 12\}.$$

Всего найдено 8 хороших подмножеств. Других вариантов нет.

Ответ: а) да; б) нет; в) 8.